概率论与数理统计

张晓伟

zhangxiaowei@uestc.edu.cn

http://staff.uestc.edu.cn/zhangxiaowei

第一章 概率论的基本概念

第一节 随机事件与随机变量

1、序言
2、随机事件与随机变量
3、样本空间和随机变量
4、随机事件的关系及运算

一.随机现象及其统计规律

现　　象

确定现象　随机现象　模糊现象

确定现象：条件决定结果

随机现象：条件不能完全决定结果

模糊现象：事物本身的含义不确定的现象

随机现象表面杂乱无章，毫无规律，但大量重复观察时，实践表明，所得到的结果却呈现某种规律。称为**随机现象的统计规律性.**

概率论与数理统计 是研究随机现象的统计规律性的一门数学学科。

抛硬币试验

实验者	抛掷次数n	出现H次数m	m/n
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
维　尼	30000	14994	0.4998

二.课程特点

1. 实际背景强，应用性很强;
2. 涉及数学基础深且广;
3. 基本概念较难理解;
4. 思维方式新;
5. 要求较强的分析问题能力.

§1 随机事件与随机变量

一. 随机试验和随机事件

试验是对自然现象进行的观察和各种科学实验.

随机试验是对随机现象所进行的观察和实验。

随机试验的特点:

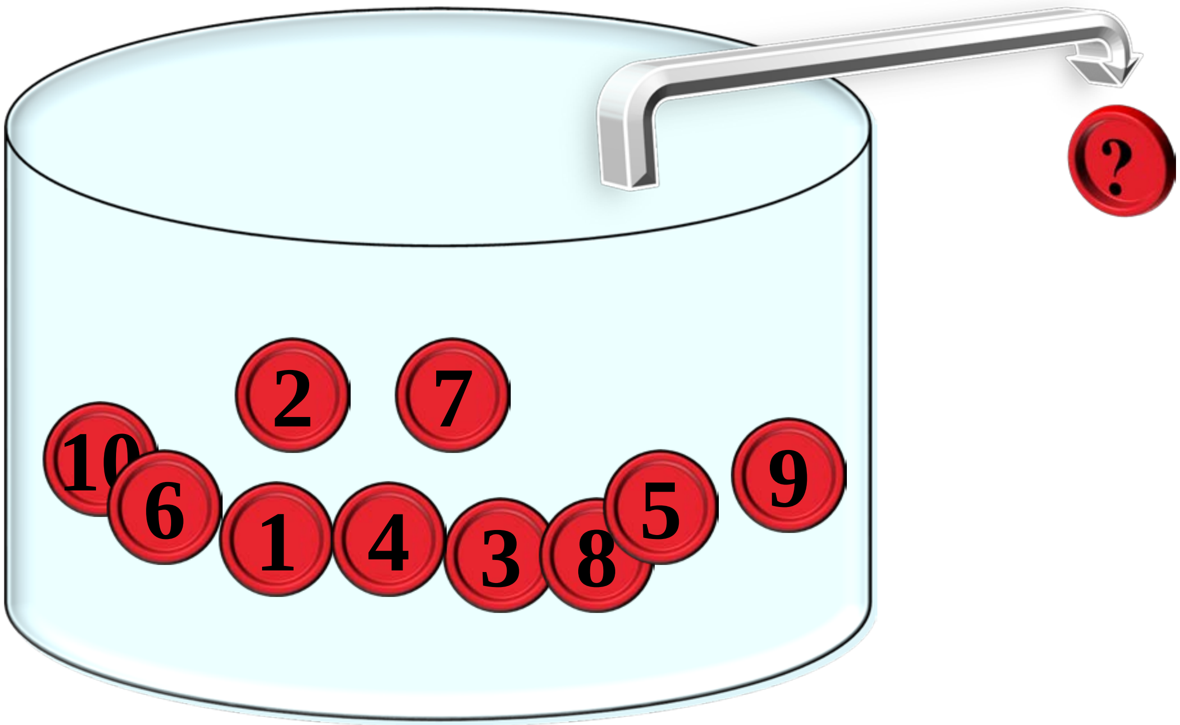
(1) 可在相同条件下重复进行;

(2) 可以弄清试验的全部可能结果;

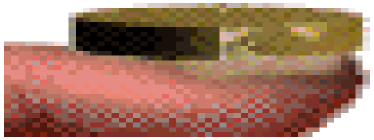
(3) 试验前不能预言将出现哪一个结果。

常见随机试验

E1　从10个标有号码 1，2，…，10 的小球中任取一个，记录所得小球的号码.



E2　抛一枚硬币，将会出现正面还是反面？



E3 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达300小时，检测该元件还能使用多少小时?

E4 测量某零件长度x和直径y所产生的误差。

E5 从N件产品中取一件，观察是否为次品。

E6 记录每天某时刻某车站等车人数。

随机试验中每一可能结果称为**随机事件**，简称**事件**。

在概率统计中用大写字母 A, B, C 以及 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots$ 表示事件。

必然事件就是随机试验中肯定发生的事件.

不可能事件就是随机试验中肯定不发生的事件.

E1　某电话总台一天接到的呼叫次数．

$A=\{$呼叫次数为偶数$\}$;

$B=\{$呼叫次数为奇数$\}$;

$C=\{$呼叫次数大于 3$\}$;

$A_i=\{$呼叫次数为$i\}, i=0,1,2,\cdots$

$\Omega=\{$呼叫次数不小于0$\}$ 是必然事件

$\varnothing=\{$呼叫次数小于0$\}$ 是不可能事件

E2　任取某团体中一员，测其身高。

用X表示该人身高，用$\{X = x\}$表示"该人的身高为x m"则有：

$$\{X = x\},\quad \{X > 0\},$$

$$\{X < 1.5\},\quad \{X > 1.70\}$$

都是随机事件。

基本事件: 一次试验中必发生一个且仅发生一个的最简单事件。

基本事件可理解为“不能再分解”的事件。

复合事件: 由若干基本事件组合而成的事件。

对于同一试验而言，试验目的不同，则基本事件就有可能不相同。我们把这称为基本事件具有相对性。

二、样本空间

将联系于试验的每一个基本事件,用包含一个元素 ω 的单点集来表示.

一一对应

基本事件 A_1 　　基本事件 A_2 　　$\cdots$

$\Updownarrow$ 　　$\Updownarrow$

单点集 $\{\omega_1\}$ 　　单点集 $\{\omega_2\}$ 　　$\cdots$

基本事件的对应元素全体所组成的集合

$$\Omega = \{\omega_1, \ \omega_2, \ \dots\}$$

称为试验的样本空间,样本空间的元素称为样本点.

复合事件是样本空间的子集.

样本空间Ω对应的事件是必然事件.

空集∅对应的事件是不可能事件.

E1 从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码.

A = {取得的小球号码为偶数},

B = {号码为奇数},

C = {号码大于 3};

A_i = {号码为 i}, $i = 1, 2, \cdots, 10$.

等等;

基本事件：

$$A_i=\{\text{号码为}i\}=\{\omega_i\}=\{i\},i=1,2,\cdots,10。$$

复合事件：

$$A=\{\text{号码为偶数}\}=\{2,4,6,8,10\}$$

$$B=\{\text{号码为奇数}\}=\{1,3,5,7,9\}$$

$$C=\{\text{号码大于}3\}=\{4,5,6,7,8,9,10\}$$

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 为样本空间，是一个必然事件。

$\varnothing=\{$号码等于0$\}$，它不包含任何基本事件，从而不包含任何样本点，是不可能事件。

一次试验之后,必定出现一个基本事件,设为$A=\{\omega\}$。

对任意事件 B,若$\omega\in B$,称事件B 发生,否则称B 没有发生。

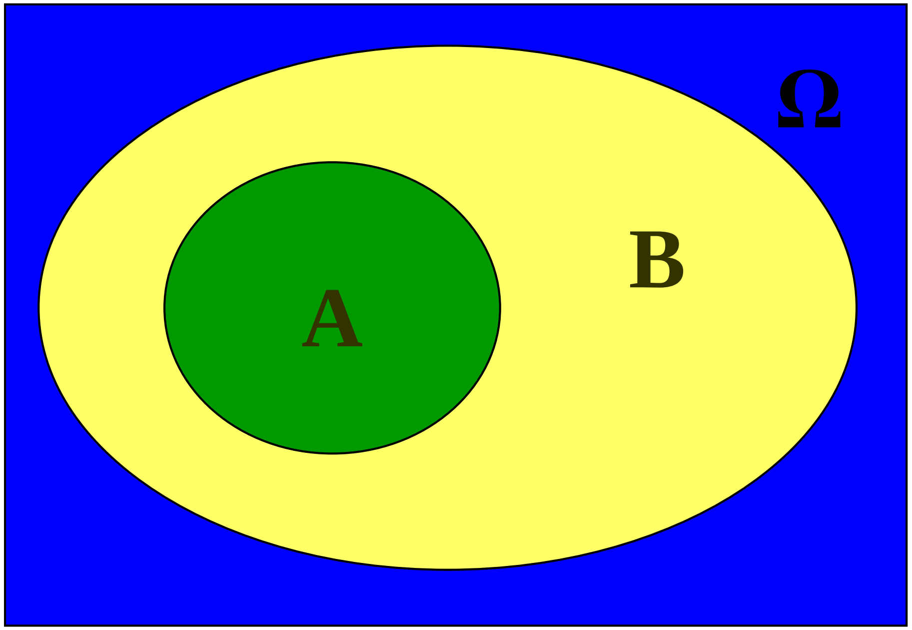
三. 随机事件的关系及运算

随机事件的关系及运算实际上就是集合的关系及运算。不过随机事件的关系有其特有的提法。

(1)包含关系

若$A\subset B$，即事件A发生，必然导致事件B 发生，称事件B包含事件A，或A是B 的子事件。

从集合的角度：若 $\omega\in A \longrightarrow \omega\in B$



如果两个事件互相包含，称为事件相等。

对任意事件A，有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega。$$

例 从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A = {球的号码为4的倍数}={4，8},

B = {球号码为偶数}={2，4，6，8，10}。

则:

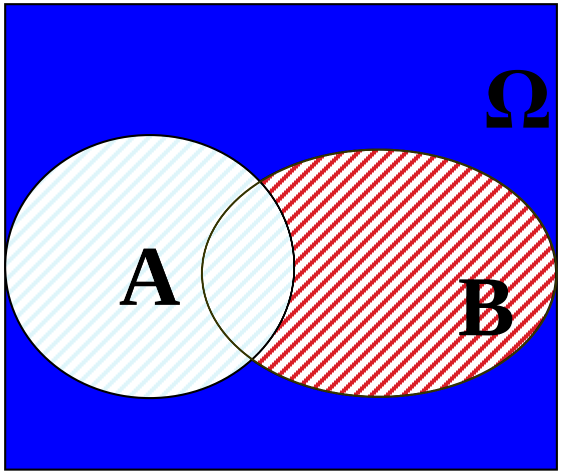
$$A \subset B$$

(2) 和事件

事件A与B 的和事件记为 A∪B，表示“事件A与B至少有一个发生” 这一事件

从集合的角度:

$$A\cup B=\{\omega \mid \omega\in A \text{ 或 } \omega\in B\}$$



$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

表示 "事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$中至少有一事件发生" 这一事件

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

表示 "事件列$A_1, A_2, \ldots,$中至少有一事件发生" 这一事件

例 对某一目标进行射击，直到命中为止。

设：$A_i = \{第i次击中目标\}, i = 1,2,\cdots$

A = {击中目标};

B = {前k次击中目标}。

则

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

(3) 积事件

事件A与B 的积事件记为 $A\cap B$ 或 AB。

从集合的角度: $A\cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}$。

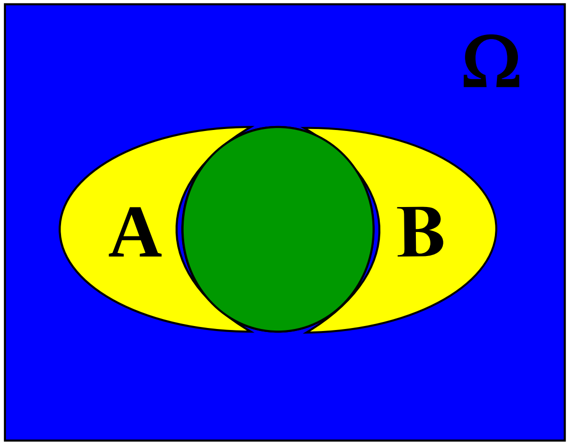
从随机事件角度:

$A\cap B$ 表示 “事件 A与B同时发生。”

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 表示 “事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$同时发生”

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示 “事件列$A_1, A_2, \ldots,$同时发生”

从集合的角度 $\xrightarrow[\text{示图}]{\text{参见}}$



例　从10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

B={球的号码大于5}={6，7，8，9，10}

C={球的号码是7或9} = {7，9}。

则: $A \cap B = C$

例 对某一目标进行射击，直至命中为止。

设:

D = {进行了k次射击};

A_i = {第i次射击命中目标}，i=1,2…

B_i = {第i次射击未命中目标}, i=1,2…

则 $D=B_1B_2\ldots B_{k-1}A_k$

(4) 互不相容事件(互斥事件)

若 $AB=\varnothing$，称 A、B为互不相容或互斥事件，即事件 A、B不可能同时发生。

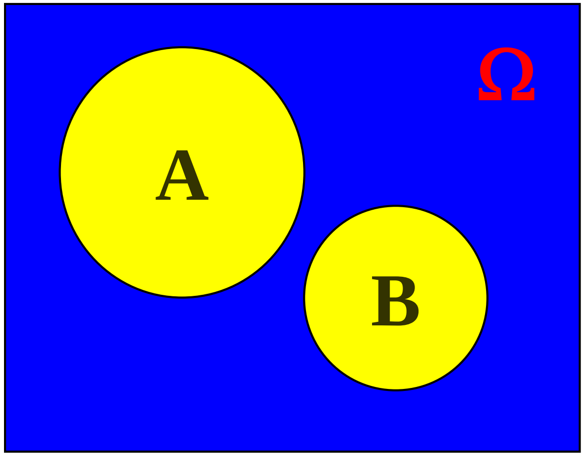
$A_1, A_2, \cdots, A_n$中任意两个互不相容，称 n个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$互不相容（两两互斥）。

事件列 $A_1, A_2, \cdots$互不相容是指其中任意有限个事件互不相容。

显然，$\varnothing$ 与任何事件互不相容。

同一试验的基本事件互不相容。

从集合的角度 $\xrightarrow[\text{示图}]{\text{参见}}$



例　从10个标有号码1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

B={球的号码是不大于4的偶数}={2，4}。

则：A与B是互不相容的事件。

例 对某一目标进行射击，直至命中为止。

设:

D_k = {进行了k次射击}，$k=1,2\ldots$

A_i = {第i次射击命中目标}，$i=1,2\ldots$

B_j = {第j次射击未命中目标}, $j=1,2\ldots$

则:

D_k, $k=1,2\ldots$ 是互不相容的事件列。

A_i, $i=1,2\ldots$ 是互不相容的事件列。

B_i， $i=1,2\ldots$ 是互不相容的事件列。

(5) 对立事件（逆事件）

若 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，称 A、B 互为对立事件（逆事件），记为 $B=\bar{A}$

从集合的角度： $\bar{A}=\{\omega \mid \omega\notin A, \varpi\in\Omega\}$

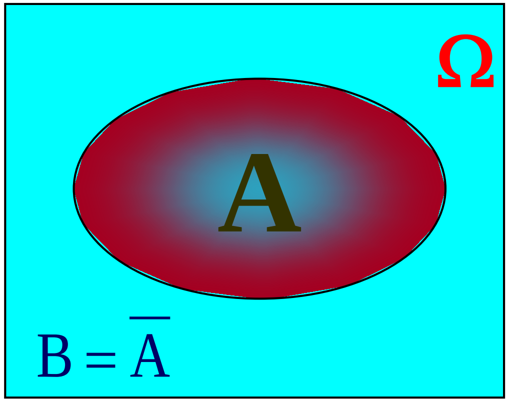
从随机事件角度：

$\bar{A}$ 表示“事件 A不发生”。这一事件

显然，在一次试验中，$\bar{A}$ 与 A 必发生且仅发生一个，非此即彼。

$$\overline{\overline{A}}=?$$

从集合的角度 $\xrightarrow[\text{示图}]{\text{参见}}$



例 从10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

B={球的号码是偶数}={2，4，6，8，10}。

则: **A与B是对立事件。**

例 甲乙两人向同一目标射击，设A={甲命中目标，乙未命中目标}则其对立事件

- $\overline{A}$ =(　)

(a)：{甲未命中且乙命中}

(b)：{甲乙均命中}

(c)：{甲未命中}

(d)：{甲未命中或乙命中}

(6) 差事件 事件 A与B 之差 A − B

从集合的角度:

$$A - B = \{\omega \mid \omega \in A, 且 \omega \notin B\}.$$

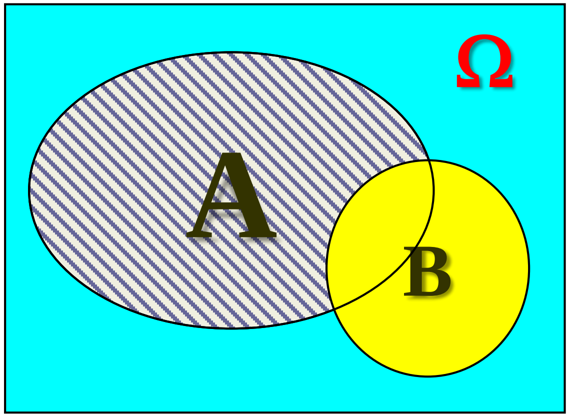
从随机事件角度:

A − B 表示 “事件A发生并且 B不发生”这一事件。

显然有

$$A - B = A\overline{B}, \quad \overline{A} = \Omega - A.$$

从集合的角度 $\xrightarrow[\text{示图}]{\text{参见}}$



例　从10个标有号码1, 2,…, 10的小球中任取一个, 记录所得小球的号码。

A={球的号码是奇数}={1，3，5，7，9},

B={球的号码不大于4}={1，2，3，4}。

则： A-B ={5，7，9}。

(7) 随机事件（集合）运算律

交换律： $A\cup B= B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

结合律： $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

分配律： $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$

德·摩根律： $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

吸收律： 如果$A\subset B$,则$A\cup B=B, AB=A.$

例 证明 $(A-AB)\cup B=A\cup B$

证明:

$$
\begin{aligned}
(A-AB)\cup B &= A(\overline{AB})\cup B && \text{差事件性质}\\
&= A(\overline{A}\cup\overline{B})\cup B && \text{对偶律}\\
&= A\overline{A}\cup A\overline{B}\cup B && \text{分配律}\\
&= A\overline{B}\cup B\\
&= A\overline{B}\cup AB\cup B && \text{吸收律}\\
&= A(B\cup\overline{B})\cup B && \text{分配律}\\
&= A\Omega\cup B = A\cup B
\end{aligned}
$$

练习：

$$A - B = A\overline{B} = A - AB = (A \bigcup B) - B$$

第二章 随机变量的分布

第一节 随机变量的分布函数

1、引例

2、随机变量

3、分布函数

例1: 一个庄家在一个签袋中放有8个白、8个黑的围棋子。规定：每个摸彩者交一角钱作“手续费”，然后一个从袋中摸出五个棋子，按下面“摸子中彩表”给“彩金”。

摸到	五个白	四个白	三个白	其它
彩金	2元	2角	5分	共乐一次

解: 用“i”表示摸出的五个棋子中有 i 个白子，则试验的样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

用 Y (单位: 元) 表示赌徒摸一次得到的彩金，则有

$$Y(i) = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

$$Y(3) = 0.05, \quad Y(4) = 0.2, \quad Y(5) = 2$$

Y是定义在Ω上的随机变量，对于每一个 i ，都有一个实数与之对应。

并且

$$P\{Y = 0.05\} = P\{3\} = C_8^2 C_8^3 / C_{16}^5 = 0.3589$$

$$P\{Y = 0.2\} = P\{4\} = C_8^1 C_8^4 / C_{16}^5 = 0.1282$$

$$P\{Y = 2\} = P\{5\} = C_8^5 / C_{16}^5 = 0.0128$$

$$P\{Y = 0\} = P\{0,1,2\} = 1 - 0.3589 - 0.1282 - 0.0128$$

$$= 0.5001$$

对于任意实数x，$\{Y(\omega)\le x\}$实际表示一个随机事件，从而有确定的概率。

例如

$$P\{Y\le -0.5\}=P(\varnothing)=0$$

$$P\{Y\le 1.2\}=P\{0,1,2,3,4\}=1-0.0128=0.9872$$

$$P\{Y\le 5\}=P(\Omega)=1$$

随机变量是近代概率统计学中最重要的基本概念之一. 19世纪下半叶由俄罗斯彼得堡学派引入，20世纪30年代在公理化体系下给出严格的表述。

一. 随机变量

定义： 设E的样本空间为Ω，对于每一个样本点$\omega\in\Omega$，都有唯一实数$X(\omega)$与之对应，（此时$X(\omega)$为一变量）且对于任意实数x，事件$\{\omega \mid X(\omega)\le x\}$都有确定的概率，则称$X(\omega)$为随机变量，简记为$X$。

引入随机变量可以借助现代数学工具，更好地描述、处理、解决各种联系于随机现象的理论和应用问题.

二. 分布函数

定义： 设X是一个随机变量， x是任意实数，称函数

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{\omega\mid X(\omega)\le x\},$$

为随机变量X的分布函数， $F(x)$也记为$F_X(x)$。

注：

（1）分布函数$F(x)$的函数值表示事件“随机点X落在$(-\infty, x]$内”的概率。

（2） $F(x)$的改变量

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=P\{x<X\le x+\Delta x\}$$

是事件“随机点X落在$(x, x+\Delta x]$内”概率。

例2: 一袋中有依次标有-1、2、2、2、3、3数字的六个球，从中任取一球，试写出球上号码X的分布函数。

解: 由题意有

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{6},P\{X=2\}=\frac{1}{2},P\{X=3\}=\frac{1}{3}$$

当$x<-1$时,

$$F(x)=P\{X\le x\}=P(\varnothing)=0。$$

当$-1\le x<2$时,

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=-1\}=1/6。$$

当$2 \leq x < 3$时，

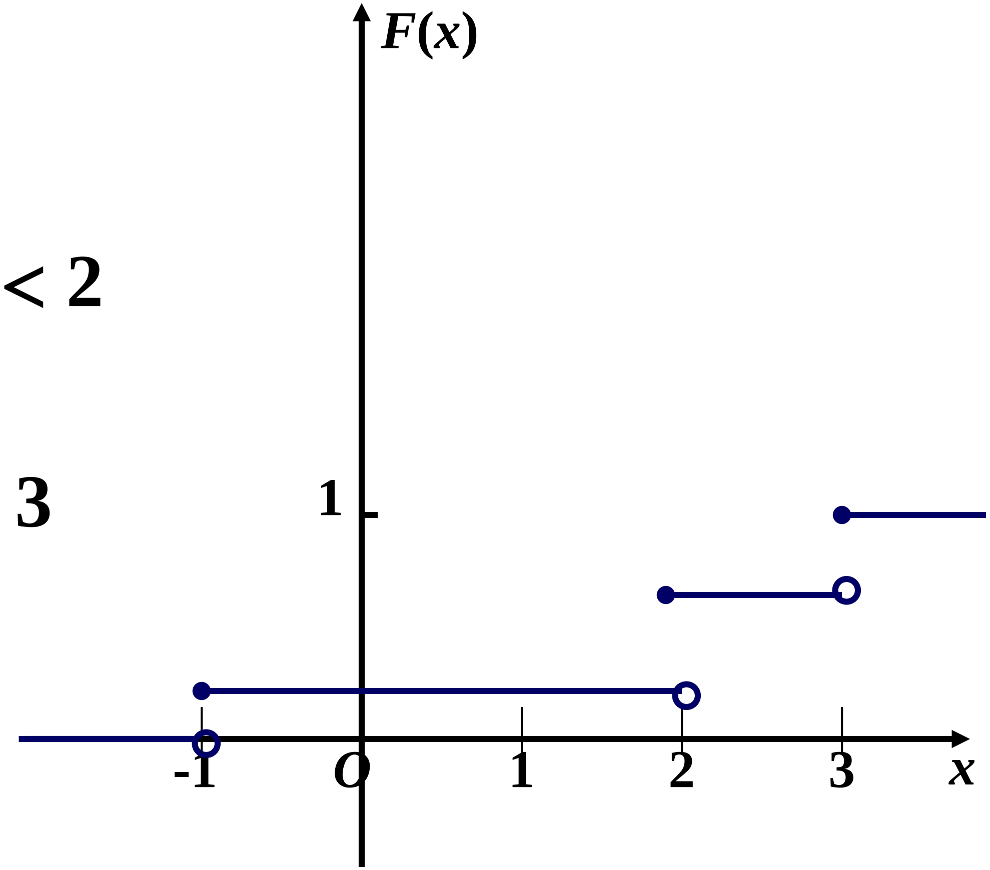
$$F(x) = P\{ X \leq x \} = P\{ X = -1 \} + P\{X = 2 \} = 2/3 \text{。}$$

当$3 \leq x$时，

$$F(x) = P\{ X \leq x \} = P(\Omega) = 1 \text{。}$$

综上所述, 可得

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-1\\ \dfrac{1}{6} & -1\le x<2\\ \dfrac{2}{3} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$



这是一个右连续的单调不降阶梯函数，在不连续点处的阶跃值恰为$P\{X=k\}$, k=-1,2,3。

例3: 一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X表示弹着点与圆心的距离。试求X的分布函数。

解: 由题意有

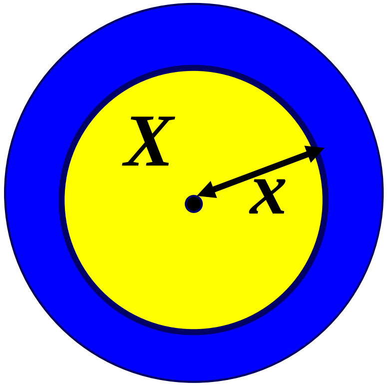
当$x < 0$时, $F(x) = P\{X \le x\} = P(\varnothing) = 0$。

当$x \ge 2$时, $F(x) = P\{X \le x\} = P(\Omega) = 1$。

当$0 \le x < 2$时, 由题意知

$$P\{0 < X \le x\} = k\,x^2$$

其中k为一常数。



由题意可得

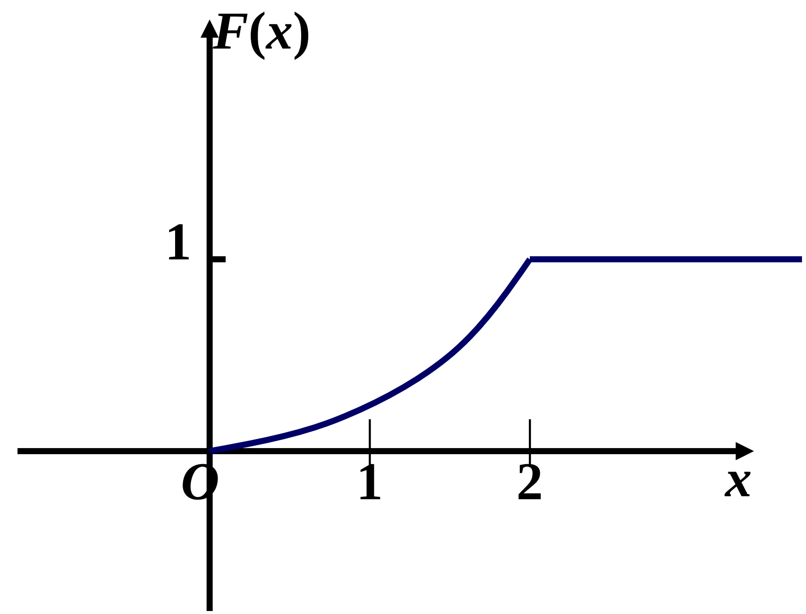
$$1 = P\{0 < X \le 2\} = 4k \rightarrow k = ¼ 。$$

从而有

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le 0\} + P\{0 < X \le x\} = \frac{1}{4}x^2$$

所以分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2; \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$



例4: 使用了t小时的电子管在以后的Δt小时内损坏的概率等于$\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, 其中$\lambda > 0$为一常数, 试写出电子管的寿命$T$ 的分布函数。

解: 由题意

当$t < 0$时, $F(t) = P\{T \le t\} = 0$。

当$t \ge 0$时, 设$\Delta t > 0$, 由题设条件有

$$P\{T \le t + \Delta t \mid T > t\} = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

即,

$$\frac{P\{t < T \le t + \Delta t\}}{P\{T > t\}} = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

所以，

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{1-F(t)}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

令 $\Delta t\to 0$时，得到关于函数$F(t)$的微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{dF(t)}{dt}=\lambda[1-F(t)]\\ F(0)=0\end{cases}$$

求解方程得分布函数

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geq 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

分布函数的性质:

（1） $F(x)$ 为单调不降函数, 即若 $x_1 \le x_2$,则有

$$F(x_1) \le F(x_2)\text{。}$$

（2） $0 \le F(x) \le 1$， 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$

（3） $F(x)$ 是右连续函数， 即 $F(x+0)=F(x)$

分布函数的性质可以 用来确定某一函数是否为一个随机变量的分布函数，还可以用来求解分布函数。

例5： 随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} a & x\le 1 \\ bx\ln x+cx+d & 1<x\le e \\ d & x>e \end{cases}$$

求a,b,c,d

分析： 利用分布函数的性质求解。

解：

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=F(-\infty)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=a \end{array}\right\}\Rightarrow a=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=F(+\infty)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=d \end{array}\right\}\Rightarrow d=1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to1+} F(x)=F(1)\Rightarrow c+d=a \\ \lim\limits_{x\to e+} F(x)=F(e)\Rightarrow d=be+ce+d \end{array}\right\}\Rightarrow c=-1, d=1.$$

第二章 随机变量的分布

第二节 离散型随机变量

1、离散型随机变量的分布律

2、贝努里试验和二项分布

3、泊松分布

第二节　离散型随机变量

一. 离散型随机变量的分布律

定义：如果随机变量X至多取可列个数值：x_1, x_2, … , 若记$p_i = P\{X = x_i\}$, 其满足:

（1）$p_i \geq 0$；

（2）$\sum p_i = 1$。

称X是离散型随机变量，并称$p_i = P\{X = x_i\}$，$i =$ 1,2,…,为X的分布律。

我们常用表格表示分布律。

X	x_1	x_2	…	x_i	…
$P\{X = x_i\}$	p_1	p_2	…	p_i	…

例1 赌博彩金问题中Y 是离散型随机变量，其分布律为：

Y	0	0.05	0.2	2
$P\{Y=y_i\}$	0.5001	0.3589	0.1282	0.0128

例2 某种产品在生产过程中的废品率为p（$0<p<1$），对产品逐个检查，直到检查出5个不合格品为止，试写出停止检查时已检查的产品个数X的分布律。

解：事件$\{X=k\}$相当于第k次检查到的产品必为不合格品，而前$k-1$次检查中查出4件不合格品。

进行k-1次检查，指定的4次检查出现不合格品的概率为 $p^5(1-p)^{k-5}$。

这种情形共有C_{k-1}^4种不同的方式。

故分布律为

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^4 p^5(1-p)^{k-5},$$

其中，$k=5,6,\ldots$

对于离散型随机变量X，其分布函数为$F(x)$为

$$\{X \le x\} = \bigcup_{x_i \le x} \{X = x_i\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F(x) &= P\{X \le x\} \\ &= P\{\bigcup_{x_i \le x} \{X = x_i\}\} \\ &= \sum_{x_i \le x} P\{X = x_i\} \\ &= \sum_{x_i \le x} p_i \end{aligned}$$

离散型随机变量的分布函数为阶梯型函数。

二. 贝努里试验和二项分布

E1：抛一枚硬币出现正反面。

E2：检查一件产品是否合格。

E3：射击，观察是否命中。

E4：考一门课，是否通过。

试验只有两个结果

称之为贝努里试验

设贝努里试验的两个基本事件之一为A，记$P(A)=p$,

令随机变量 $X=\begin{cases} 1，若事件A发生; \\ 0，若事件A不发生。\end{cases}$

则X的分布律为

X	0	1
$P\{X=x_i\}$	$1-p$	p

称X服从

0 -1 分布

或

两点分布

定义：将试验E按下述条件重复进行n次，

（1）每次试验的条件不变；

（2）各次试验的结果互不影响。

则称这n次试验为n次重复独立试验。

n次重复独立的贝努里试验，称为n重贝努里试验，或称贝努里概型。

对于一个贝努里试验，我们可以考察如下问题：

（1）事件A首次发生的试验次数；

（2）事件A发生k次时的试验次数；

（3）n次试验中事件A发生的次数。

（1）事件A 首次发生的试验次数;

例1 某射手一次射击命中目标的概率为p（$0<p<1$），射击进行到第一次命中目标为止，试写出射击次数X 的分布律。

X服从

几何分布

解：分布律为

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},$$

其中，$k=1,2,\ldots$

（2）事件A发生k次时的试验次数;

例2 某种产品在生产过程中的废品率为p（$0<p<1$），对产品逐个检查，直到检查出5个不合格品为止，试写出停止检查时已检查的产品个数X的分布律。

X服从Pascal分布或负二项分布

解：分布律为

$$P\{X=k\}=C_{k-1}^{4}\,p^{5}(1-p)^{k-5},$$

其中，$k=5,6,\ldots$

3）n次贝努里试验中事件A发生的次数。

定理：在n重贝努里试验中，事件A发生的概率为$P(A)=p$，$0<p<1$，则事件A发生的次数X的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ \ k=0,1,2..,n.$$

若随机变量X表示“n次贝努里试验中事件A发生的次数”称随机变量X服从二项分布，记为

$$X \sim B(n,p)$$

特别地，0-1 分布可以看作$X \sim B(1, p)$

思考：n次贝努里试验中事件A 不发生的次数Y 服从什么分布？

答：服从$B(n,1-p)$

例3：设有一批同类产品共有N个，其中次品有M个，现从中任取(有放回)n个，试求取出n件中所含的次品件数X的分布律。

解：因为有放回取出，各次抽取是相互独立的，抽n件产品相当于做n重贝努里试验。故

$$X \sim B\left(n, \frac{M}{N}\right)$$

所以，X的分布律为

$$P\{X=k\} = C_n^k \left(\frac{M}{N}\right)^k \left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n.$$

思考：将抽取方式改为无放回(n<N-M)抽取，试写出X的分布律。

$$P\{X=k\}=\frac{C_{N-M}^{n-k}C_M^k}{C_N^n}, k=0,1,..,\min(M,n)$$

X服从超几何分布

例4：有300台独立运转的同类机床，每台发生故障的概率都是0.01，若一人排除一台的故障。问至少需要多少名工人，才能保证不能及时排除故障的概率小于0.01。

解：设X表示同一时刻发生故障的机床数，则有

$$X \sim B(300, 0.01)。$$

若设配N个工人，由题意得，应使

$$P\{X > N\} < 0.01,$$

即是求上述不等式成立的最小N值。

三. 泊松分布

定义：若随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,\cdots; \lambda>0,$$

则称随机变量X 服从参数为λ 的泊松分布。

记为 $X \sim P(\lambda)$.

泊松分布的重要性在于:

(1) 现实中大量随机变量服从泊松分布;

(2) 泊松分布可视为二项分布的极限分布.

定理：设随机变量序列$X_n \sim B(n, p_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ 即

$$P_n\{X_n = k\} = C_n^k (p_n)^k (1 - p_n)^{n-k},\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

若 $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$ 则有

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

注: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{\frac{1}{n}} = \lambda$

所以，当n够大，p_n较小时，有

$$C_n^k (p_n)^k (1-p_n)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

这里，$np_n = \lambda$.

(2) 实际问题中, n 次独立重复试验中, “稀有事件”出现的次数可认为服从泊松分布。

(3) $n \geq 20, p \leq 0.05$

例5：有300台独立运转的同类机床，每台发生故障的概率都是0.01，若一人排除一台的故障。问至少需要多少名工人，才能保证不能及时排除故障的概率小于0.01。

解：设X表示同一时刻发生故障的机床数，则有

$$X \sim B(300, 0.01)。$$

若设配N个工人，由题意得，应使

$$P\{X > N\} < 0.01,$$

即是求上述不等式成立的最小N值。

因为$300\times0.01=3$（此值很小），故可近似认为X服从λ为3的泊松分布，即$X\sim P(3)$。于是，

$$0.01 > P\{X > N\} = \sum_{k=N+1}^{+\infty}\frac{3^k}{k!}e^{-3}.$$

查附表1可得

$$P\{X>7\}=0.11905>0.01$$

$$P\{X>8\}=0.00380<0.01$$

所以，至少需要配备8个修理工人。

例6： 已知运载火箭在飞行中,进入它的仪器舱的宇宙粒子数服从参数为λ的泊松分布.而进入仪器舱的每个粒子落到仪器的重要部位的概率等于p,试求恰有k个粒子落到仪器重要部位的概率.

解: 设 X表示宇宙粒子进入仪器舱的个数。由题意得，$X \sim P(\lambda)$，即

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, m=0,1,2,\cdots$$

令Y表示落到重要部位的粒子数，由题意知

$$P\{Y=k\}$$

为所求。

易得

$$P\{Y=k \big| X=m\}=C_m^k p^k(1-p)^{m-k},$$
$$k=0,1,2,\cdots,m.$$

且

$$\{X=m\}, m=0,1,\cdots$$

构成样本空间的一个可列划分。

由全概率公式得

$$P\{Y=k\}=\sum_{m=0}^{+\infty}P\{X=m\}P\{Y=k\big|X=m\}$$

$$=\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}C_m^k p^k(1-p)^{m-k}$$

$$=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-k}(1-p)^{m-k}}{(m-k)!}$$

$$\xrightarrow{n=m-k}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left[\lambda(1-p)\right]^n}{n!}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{-\lambda(1-p)}$$

$$= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

即落到仪器重要部位的粒子数服从参数为λp的泊松分布。

练习：独立重复地进行某项试验，成功就停止，每次成功的概率都是1/2，若至多进行3次试验，用X表示试验次数，试写出X的分布律和分布函数。

第二章 随机变量的分布

第三节 连续型随机变量

1、概率密度函数

2、均匀分布和指数分布

3、泊松分布

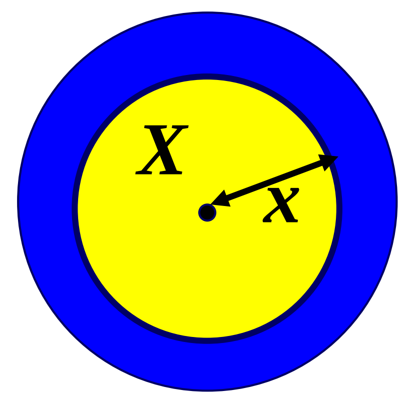
4、正态分布

例1：一个靶子是半径为2米的圆盘，设击中靶上任一同心圆盘的概率与该圆盘的面积成正比，射击均能中靶，用X表示弹着点与圆心的距离。试求X的分布函数。

解：由第一节可知，X的分布函数为

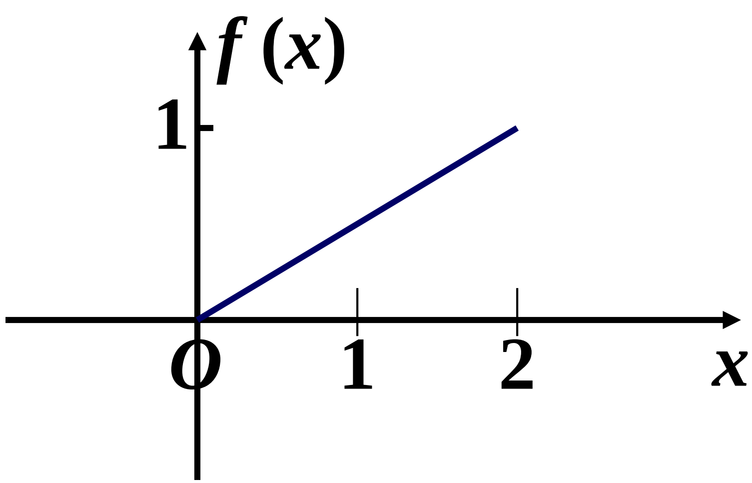
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2/4, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

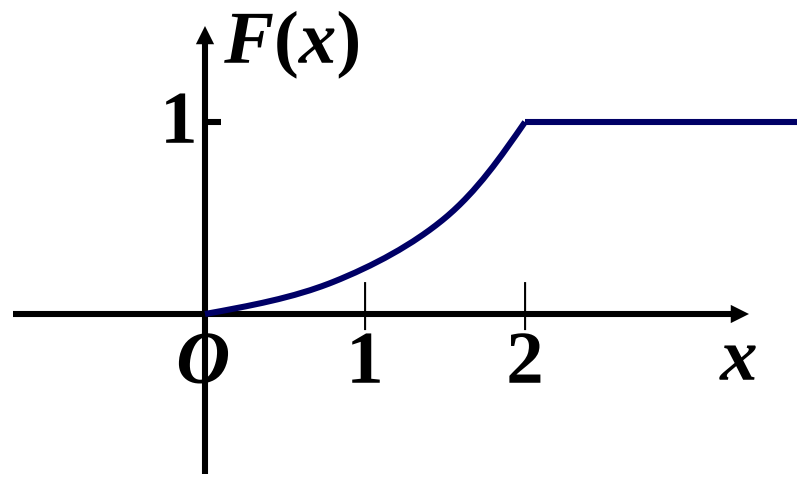
考虑函数 $f(x)=\begin{cases}x/2, & if\ 0<x<2\\ 0 & else\end{cases}$



$f(x)$ 的变上限积分为

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x \frac{t}{2}dt = \frac{x^2}{4}, & 0 \le x < 2 \\ \int_0^2 \frac{t}{2}dt = 1, & x \ge 2 \end{cases} = F(x)$$





一、概率密度函数

定义： 设随机变量X 的分布函数为$F(x)$, 若存在非负函数$f(x)$, 对于任意实数x, 均有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

则称随机变量X 是连续型随机变量，称函数$f(x)$为X的概率密度函数，简称概率密度。

概率密度函数的性质：

$$(1)\quad f(x) \geq 0$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

注记：若有函数$f(x)$满足上述(1)和(2)，则它必是某个随机变量的概率密度。

连续型随机变量相关性质:

(1) 连续型随机变量X的分布函数是连续函数。

证明：由分布函数的性质可知，$F(x)$在 x 处右连续。而且对于$\Delta x > 0$有，

$$
\begin{aligned}
0 &\le F(x) - F(x-\Delta x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x-\Delta x} f(t)dt \\
&= \int_{x-\Delta x}^{x} f(t)dt \to 0 \quad (\Delta x \to 0)
\end{aligned}
$$

即$F(x)$在x处左连续，故$F(x)$在x处连续。

(2) X 是连续型随机变量，则对任意实数$x_0 \in R$，有$P\{X = x_0\} = 0$。

证明：

$$
\begin{aligned}
0 &\le P\{X = x_0\} \\
&\le P\{x_0 - \Delta x < X \le x_0\} \\
&= F(x_0) - F(x_0 - \Delta x)
\end{aligned}
$$

令$\Delta x \to 0$，由$F(x)$的连续性可知有

$$
0 \le \boxed{P\{X = x_0\} = F(x_0) - F(x_0 - 0)} = 0
$$

(3) $$\begin{aligned} P\{x_1 < X \le x_2\} &= P\{x_1 \le X < x_2\} \\ &= P\{x_1 < X < x_2\} \\ &= P\{x_1 \le X \le x_2\} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \end{aligned}$$

(4) $P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$，但是其逆不真。

(5) 若$f(x)$在点x处连续，则有 $F'(x) = f(x)$.

例3：设

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ x\in R$$

证明 $\varphi(x)$ **是概率密度函数。**

证明：显然$\varphi(x)\geq 0$，需证明$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1.$

令 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$

则有 $I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2}{2}} \boldsymbol{dxdy}$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \boldsymbol{d\theta} \int_{0}^{+\infty} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{r}^2}{2}} \boldsymbol{rdr}$$

$$= 2\pi \left(-\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{r}^2}{2}} \right)_{0}^{+\infty} = 2\pi$$

所以 $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{I}}{\sqrt{2\pi}} = 1.$

例4： 设随机变量X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-\frac{x}{\theta}}, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha \end{cases},\quad \theta>0.$$

试确定常数k 。

解： 因为 $1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{\alpha}^{+\infty} ke^{-\frac{x}{\theta}}dx$

$$=-k\theta\int_{\alpha}^{+\infty} d\left(-\frac{x}{\theta}\right)$$

$$=k\theta e^{-\frac{\alpha}{\theta}}$$

所以 $k=\theta^{-1}e^{\frac{\alpha}{\theta}}.$

例5: **已知随机变量X的概率密度函数为**

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

若用Y表示对X进行三次独立重复观测中, 事件$\{X\le 1/2\}$出现的次数, 求$P\{Y=2\}$。

解：把事件$\{X\le 1/2\}$看作事件A, 则Y表示进行3次重复独立实验时, 事件A发生的次数, 则$Y\sim B(3,P(A))$, 因为

$$P\{X\le\frac{1}{2}\}=\int_{-\infty}^{1/2}f(x)dx=\int_{0}^{1/2}2xdx=\frac{1}{4}$$

所以 $Y\sim B(3,\ 1/4)$，从而

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}=\frac{9}{64}.$$

二. 均匀分布和指数分布

(1) 均匀分布

设随机变量X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称随机变量X在区间 (a, b) 上服从均匀分布。记为$X \sim U(a, b)$。

特点：随机变量X落在(a, b)的子区间的概率与位置无关，仅与测度（即长度）成正比。

即对于$(c, c+l) \subset (a, b)$，有

$$P\{c < X \leq c+l\} = \int_c^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}.$$

应用：

(1) 大量试验服从均匀分布;

(2) 其它随机变量的计算机模拟的基础, 如蒙特卡罗方法。

例6： 设随机变量$X \sim U(0,5)$，求方程$4r^2+4Xr+X+2=0$有实根的概率 p。

解：

$$\begin{aligned} p &= P\{(4X)^2 - 4\times 4(X+2)\geq 0\} \\ &= P\{X^2-(X+2)\geq 0\} \\ &= P\{(X-2)(X+1)\geq 0\} \\ &= P(\{X\leq -1\}\cup\{X\geq 2\}) \\ &= P\{X\leq -1\} + P\{X\geq 2\} \\ &= P\{2\leq X\leq 5\} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

（2）指数分布

设随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad(\lambda>0)$$

则称随机变量X服从参数为λ的**指数分布**。

记为$X\sim Exp(\lambda)$。

特点：指数分布具有无后效性。即

$$P\{X>t+s\mid X>t\}=P\{X>s\}$$

例7: **设某类日光灯管的使用寿命X服从参数为λ=0.0005的指数分布.1)任取一根灯管,求能正常使用1000h以上的概率.2)若这根灯管已使用了2000h,求还能使用1000h以上的概率.**

解: 因为X~$Exp(\lambda)$, 所以X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases},\lambda=0.0005$$

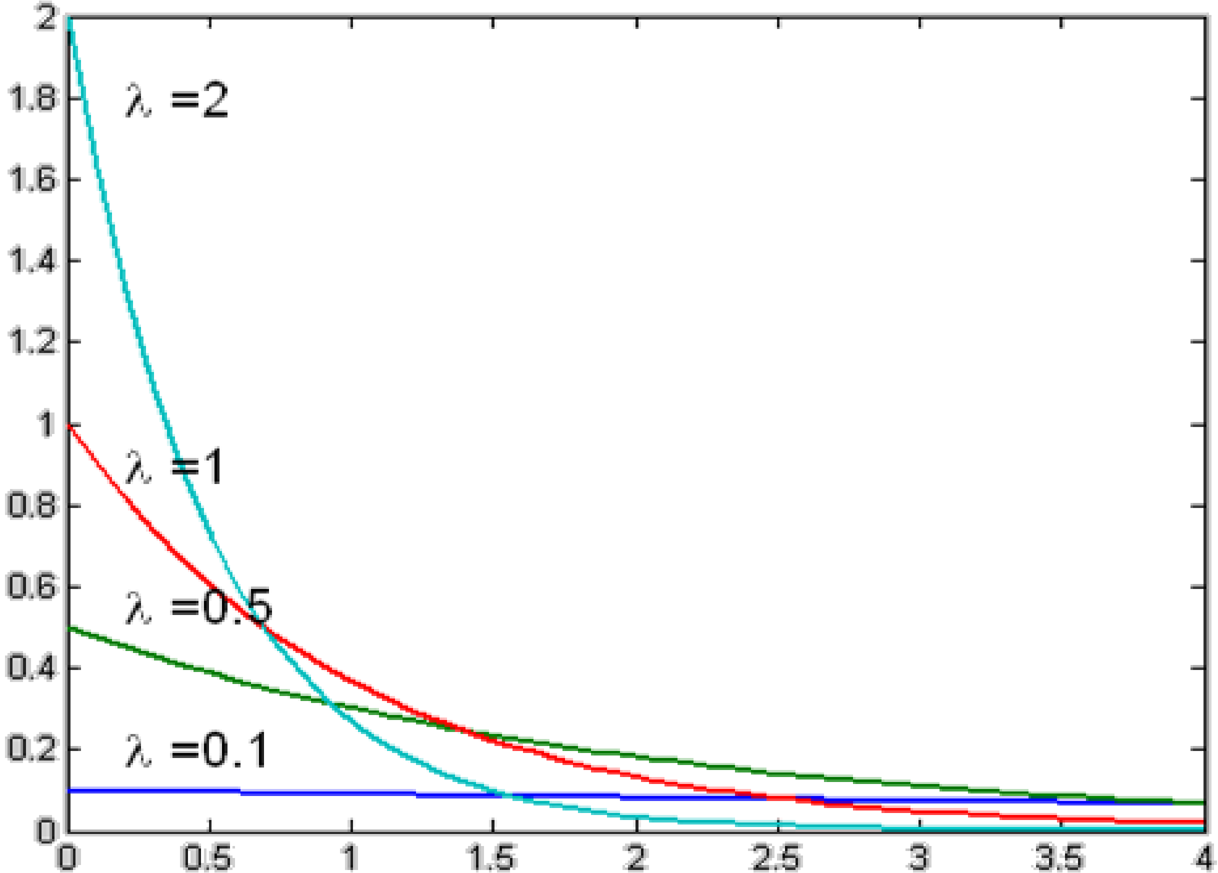
1) $P\{X>1000\} = 1-P\{X \le 1000\}$

$$=1-\int_0^{1000}\lambda e^{-\lambda x}\,dx=e^{-0.5}\approx 0.607.$$

2) $P\{X>3000 \mid X>2000\}=\dfrac{P\left\{X>3000, X>2000\right\}}{P\left\{X>2000\right\}}$

$$=\frac{P\left\{X>3000\right\}}{P\left\{X>2000\right\}}=\frac{\int_{3000}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx}{\int_{2000}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\,dx}=\frac{e^{-3000\lambda}}{e^{-2000\lambda}}\approx 0.607.$$

指数分布的概率密度函数曲线 $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ， $x > 0$



三、正态分布

设随机变量X的概率密度函数为

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in R$$

其中$\mu,\sigma\ (\sigma>0)$是常数，则称随机变量X服从参数为μ，σ^2的正态分布(或高斯分布)，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

特别地，当$\mu=0$，$\sigma=1$时，其概率密度函数为

$$\varphi(x)=\varphi(x;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in R$$

则称随机变量X服从标准正态分布，记为$X\sim N(0,1)$.

(1) 正态分布概率密度曲线的特征

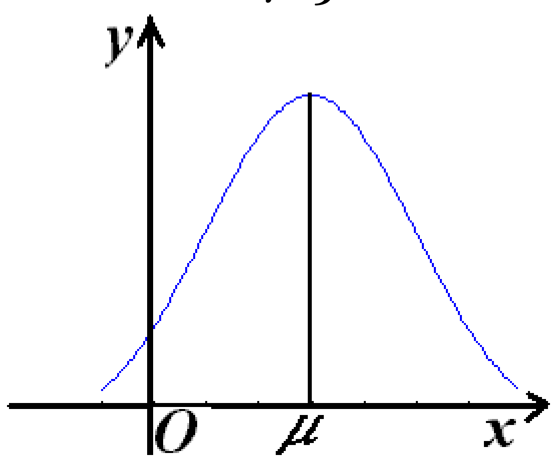
$(\boldsymbol{a})\ \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\boldsymbol{x};\mu,\sigma^2)\boldsymbol{dx}=1$

$(\boldsymbol{b})$ 曲线关于直线$\boldsymbol{x}=\mu$对称,即对

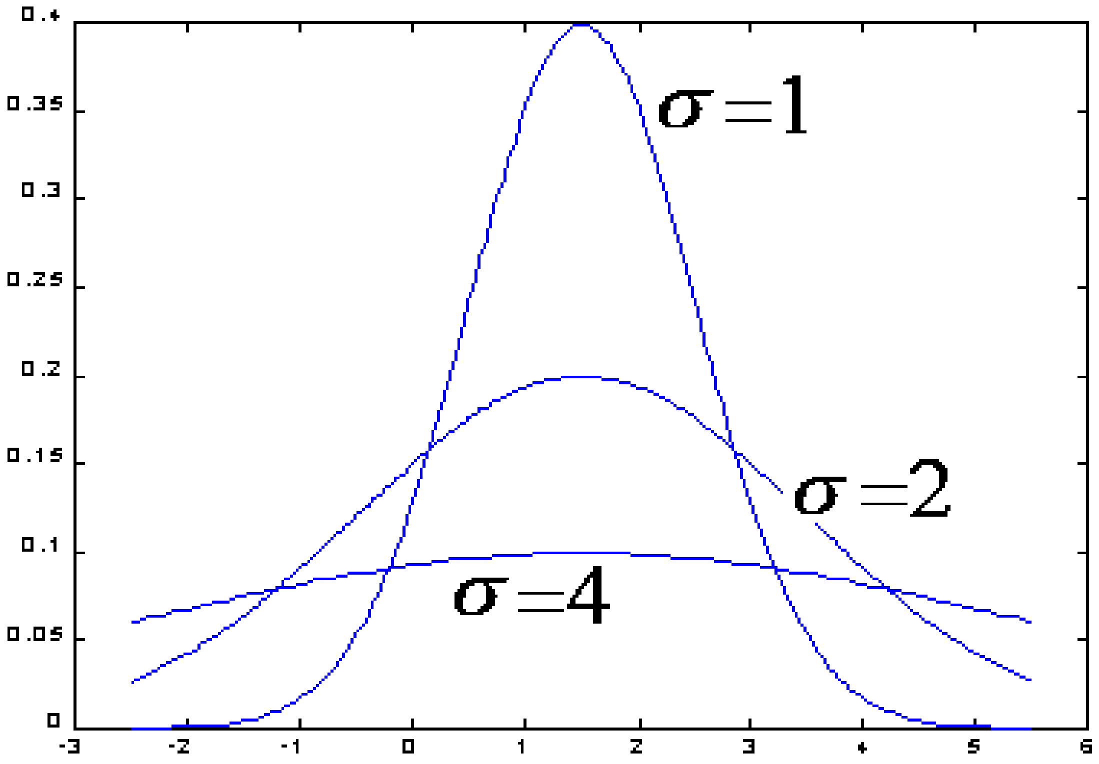
任意实数$\boldsymbol{x}$有$\varphi(\mu-\boldsymbol{x};\mu,\sigma^2)=\varphi(\mu+\boldsymbol{x};\mu,\sigma^2)$

$(\boldsymbol{c})$ 曲线下直线两侧的面积各为1 / 2，并且

$\boldsymbol{P}\{\mu-\boldsymbol{x}<\boldsymbol{X}\leq\mu\}=\boldsymbol{P}\{\mu<\boldsymbol{X}\leq\mu+\boldsymbol{x})$



(c) 曲线在$x=\mu$处取得最大值$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;固定$\mu$, σ越大，曲线越趋于平坦.



(2) 正态分布概率的计算

若随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其分布函数为

$$\Phi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\quad x\in R$$

若随机变量X 标准正态分布，其分布函数为

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt,\quad x\in R$$

注： (1)由于$\Phi(x)$不能解析求出，可查附表2。

(2)由$\varphi(x)$的对称性，有

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

故表中仅给出$x\geq 0$的值。

$(\boldsymbol{a})$ 若随机变量$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(0,1)$，则

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{a} < \boldsymbol{X} \le \boldsymbol{b}\} = \Phi(\boldsymbol{b}) - \Phi(\boldsymbol{a})$$

$(\boldsymbol{b})$ 若随机变量$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\mu,\sigma^2)$，则

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}_2\} = \Phi(\frac{\boldsymbol{x}_2 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\boldsymbol{x}_1 - \mu}{\sigma})$$

证明：

$$\Phi(\boldsymbol{x};\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{e}^{-\frac{(\boldsymbol{t}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \boldsymbol{dt}$$

$$\xrightarrow[\boldsymbol{dt}=\sigma\boldsymbol{dy}]{\boldsymbol{y}=\frac{\boldsymbol{t}-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{\boldsymbol{x}-\mu}{\sigma}} \boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{y}^2}{2}} \boldsymbol{dy} = \Phi(\frac{\boldsymbol{x}-\mu}{\sigma})$$

例8：已知随机变量$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\mu,\sigma^2)$，证明

$$\boldsymbol{P}\{|\,\boldsymbol{X}-\mu\,| \le \boldsymbol{x}\} = 2\Phi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)-1.$$

证明：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\{|\,\boldsymbol{X}-\mu\,| \le \boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{P}\{\mu-\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{X} \le \mu+\boldsymbol{x}\}&\\
&= \Phi\left(\frac{\mu+\boldsymbol{x}-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-\boldsymbol{x}-\mu}{\sigma}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)-\left(1-\Phi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)\right)\\
&= 2\Phi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\sigma}\right)-1.
\end{aligned}$$

特别地，有

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=2\Phi(1)-1=0.6826$$

$$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=2\Phi(2)-1=0.9544$$

$$P\{|X-\mu|<3\sigma\}=2\Phi(3)-1=0.9974$$

这说明X以很大的概率密集在$x=\mu$的附近。

例9：设 $X \sim N(10, 2^2)$，求 α 使 $P\{|X - 10| < \alpha\} = 0.901$

解：因为

$$P\{|X-10|<\alpha\}=2\Phi(\alpha/2)-1=0.901$$

所以

$$\Phi(\alpha/2)=0.9505$$

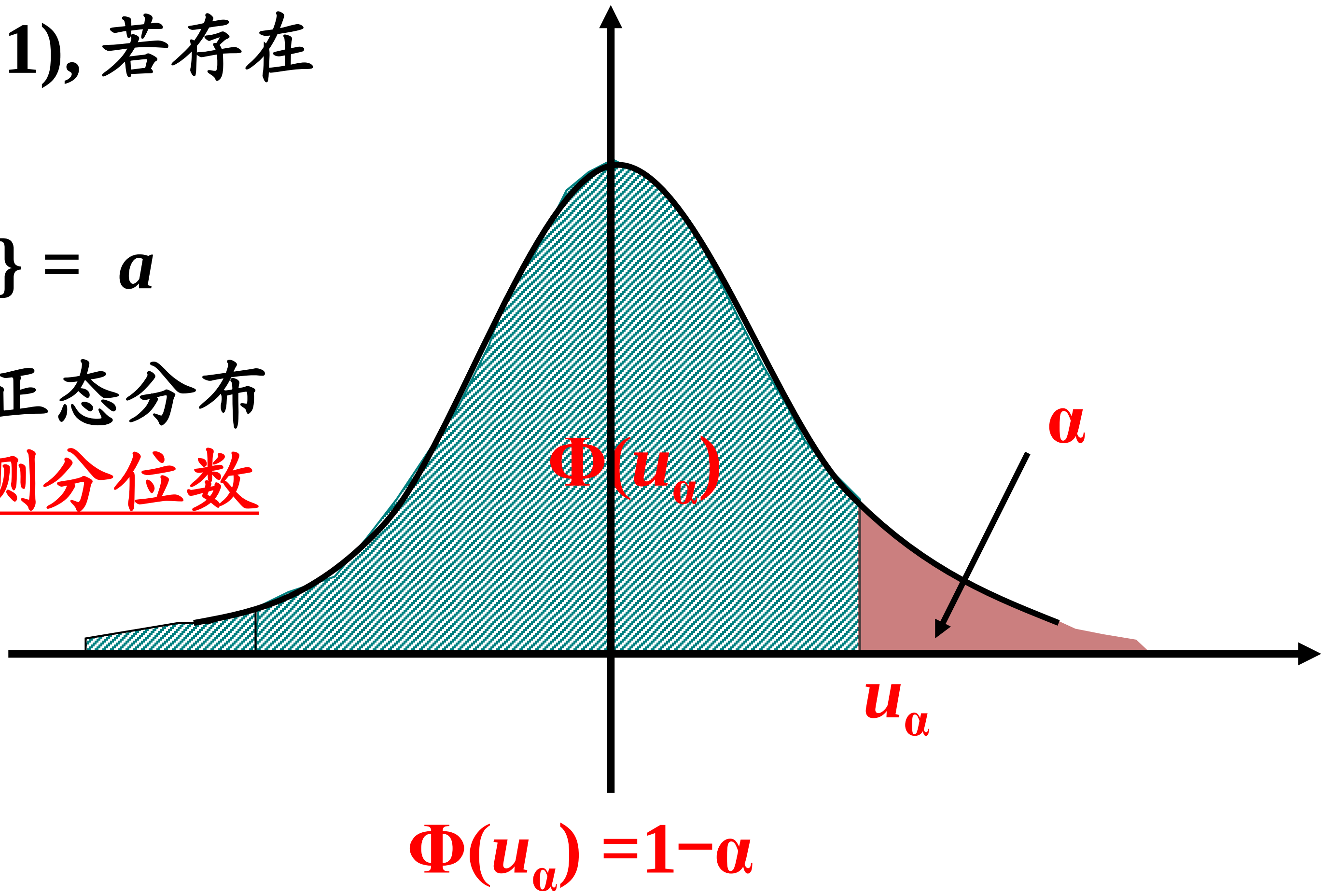
查表 $\frac{\alpha}{2}=1.65$，即 $\alpha=3.3$

有时，我们需要求随机变量以给定概率落在某个区间上的分界点，称之为分位数。

如设 $X \sim N(0, 1)$, 若存在某个实数 u_a 使

$$P\{X > u_a\} = a$$

则称 u_a 为标准正态分布对应于 a 的上侧分位数



并不是随机变量中只有离散型和连续型两类.

例:设有一均匀陀螺,在其圆周的一半圆周上都标明刻度1,另一半圆周上均匀地刻上区间(0,1)上的诸数字.旋转陀螺,求它停下来时其圆周上触及桌面上的点刻度记为X.

问: X是离散的还是连续的，还是其它类型？为什么？X的分布函数是什么?

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{x} < 0 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \boldsymbol{x}, & 0 \leq \boldsymbol{x} < 1 \\ 1, & \boldsymbol{x} \geq 1 \end{cases}$$

第 三 章　多 维 随 机 变 量

第一节 二维随机变量及其分布

一、联合分布函数及其性质

二、联合分布律及其性质

三、联合概率密度及其性质

四、二维均匀分布

五、二维正态分布

§ 3.1二维随机变量及其分布

二维随机变量

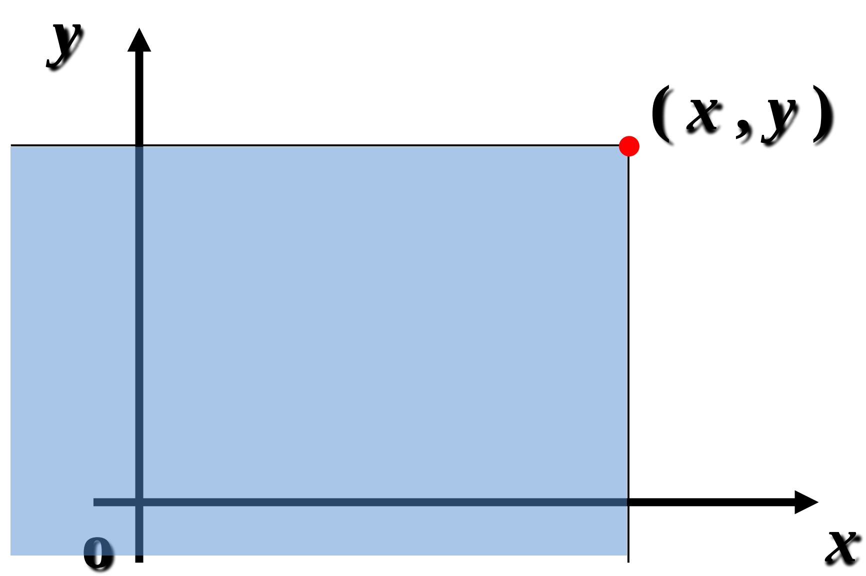
定义：设随机试验E的样本空间为Ω，对于每一样本点$\omega \in \Omega$，有两个实数$X(\omega), Y(\omega)$与之对应，称它们构成的有序数组(X,Y)为**二维随机变量(向量)**。

注： X，Y都是定义在Ω上的随机变量.

一、联合分布函数

定义： 对任意实数对 $(x, y) \in R^2$，称二元函数 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$ 为 (X, Y) 的**联合分布函数**。

一维随机变量 X、Y 的分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$ 称为 (X, Y) 的**边缘分布函数**。



联合分布函数的几何意义:

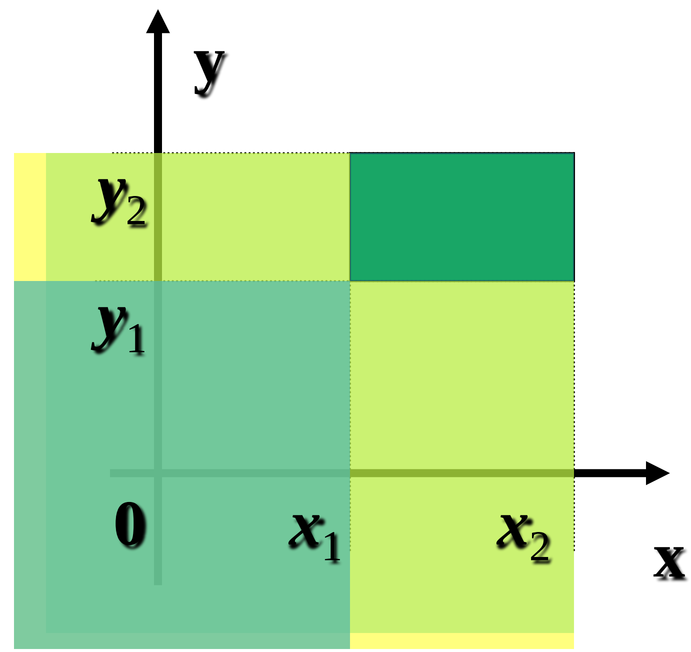
1. 由联合分布函数可确定边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$$

2. $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$



练习：

已知$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的联合分布函数为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}(1-\boldsymbol{e}^{-2x})(1-\boldsymbol{e}^{-3y}), & \boldsymbol{x}\ge 0,\boldsymbol{y}\ge 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

试求边缘分布函数。

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}1-\boldsymbol{e}^{-2x}, & \boldsymbol{x}\ge 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases};$$

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})=\begin{cases}1-\boldsymbol{e}^{-3y}, & \boldsymbol{y}\ge 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

联合分布函数的性质：

1：单调不减性： $F(x,y)$分别对x ,y单调不减。即

$$当 x_1 < x_2 时, 对 \forall y \in R, 有 F(x_1, y) \le F(x_2, y);$$

$$当 y_1 < y_2 时, 对 \forall x \in R, 有 F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

2：规范性

$$0 \le F(x,y) \le 1;$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$$

$$\lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$$

3：右连续性：$F(x, y)$ 分别关于x, y为右连续。

即 $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x,y) = F(x_0, y)$, $\lim\limits_{y \to y_0^+} F(x,y) = F(x, y_0)$

4：相容性：对任意 $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$, 有：

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

注：如果二元函数 $F(x, y)$ 满足上述4个性质，则必存在二维随机变量(X, Y)以$F(x, y)$为分布函数。

n维随机变量的联合分布函数

定义： n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n\}$$

这里，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为n个任意实数。

注： 由$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数，可确定其中任意k个分量的联合分布函数，称为k维边缘分布函数. 例如:

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty, \cdots, +\infty)$$

思考： 一维分布函数与二维分布函数的联系与区别？

二. 联合分布律

定义：设二维随机变量$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$至多取可列对数值$(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j),\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2,\cdots,$记

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}_j\}=\boldsymbol{p}_{ij},\ (\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2,\cdots) \qquad (\star)$$

且满足

$$(1)\quad \boldsymbol{p}_{ij}\geq 0,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}=1,2,\cdots;$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\boldsymbol{p}_{ij}=1,$$

称$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$为二维离散型随机变量，称式$(\star)$为$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的联合分布律。

注：

(1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{y}\} = \sum_{\boldsymbol{x}_i \le \boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}_j \le \boldsymbol{y}} \boldsymbol{p}_{ij}$

(2) 由联合分布律可得随机变量$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$的分布律：

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}_i\} = \sum_{j=1}^{+\infty} \boldsymbol{p}_{ij} = \boldsymbol{p}_{i\bullet} \quad (\boldsymbol{i} = 1, 2, \cdots);$$

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}_j\} = \sum_{i=1}^{+\infty} \boldsymbol{p}_{ij} = \boldsymbol{p}_{\bullet j} \quad (\boldsymbol{j} = 1, 2, \cdots),$$

(3) 用表格表示联合分布律和边缘分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例1：在1,2,3,4 中随机取出一数 X,再随机地从 1~X中取 一数Y，求(X,Y)的联合分布律。

解： X,Y 的所有可能取值均为1，2，3，4，所以X 的分布律为：

$$P\{X=i\}=\frac{1}{4},\ \ i=1,2,3,4.$$

(X,Y)的联合分布律为

$$\begin{aligned}p_{ij}&=P\{X=i,Y=j\}\\&=P\{X=i\}P\{Y=j\,|\,X=i\}\\&=\begin{cases}0, & j>i\\ \frac{1}{4}\frac{1}{i}, & j\le i\end{cases},\qquad i,j=1,2,3,4.\end{aligned}$$

X \ Y	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
	25/48	13/48	7/48	1/16	1

例 2：(两点分布)

　　用一细绳将一小球悬挂于空中，现用一剪刀随机的去剪细绳一次，剪中的概率为p。设剪中的次数为X，小球下落的次数为Y，试写出(X, Y)的联合分布律。

$X \backslash Y$	0	1
0	$1-p$	0
1	0	p

称(X, Y)服从二维两点分布.

思考：能否用边缘分布律来确定联合分布律，原因是什么？

答：不能确定。多维随机变量的联合分布不仅与每个分量的边缘分布有关，而且还与每个分量之间的联系有关！

见例3.1.3-4.

三. 联合概率密度

定义： 二维随机变量(X, Y)的联合分布函数为$F(x, y)$,如果存在非负的函数$f(x,y)$使得对任意实数对(x,y)有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,dudv,$$

称(X,Y)是连续型随机变量，$f(x,y)$称为(X,Y)的联合概率密度。

联合概率密度的性质：

(1) $f(x,y) \geq 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

注：满足（1）和（2）的二元函数$f(x,y)$必是某个二维随机变量的联合概率密度。

(3) 若$f(x,y)$在(x,y)处连续, 则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

(4) 若 $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{R}^2$,有

$$\boldsymbol{P}\{(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \in \boldsymbol{G}\} = \iint\limits_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{dxdy}$$

(5) $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$的边缘概率密度为

$$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{dy} \qquad \boldsymbol{f_Y}(\boldsymbol{y}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{dx}$$

证： $$\boldsymbol{F_X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},+\infty) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{dv}\right]\boldsymbol{du}$$

$$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F_X}'(\boldsymbol{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{dv}$$

一维随机变量的分布律与概率密度的关系

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{\boldsymbol{x}_i \le \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{p}_i;$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0) = \int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{d}\boldsymbol{x} = \lim_{\|\Delta\| \to \infty} \sum_{\boldsymbol{x}_i \le \boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i) \Delta \boldsymbol{x}_i$$

$\boxed{\boldsymbol{p}_i\text{和}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}\text{作用相同}}$

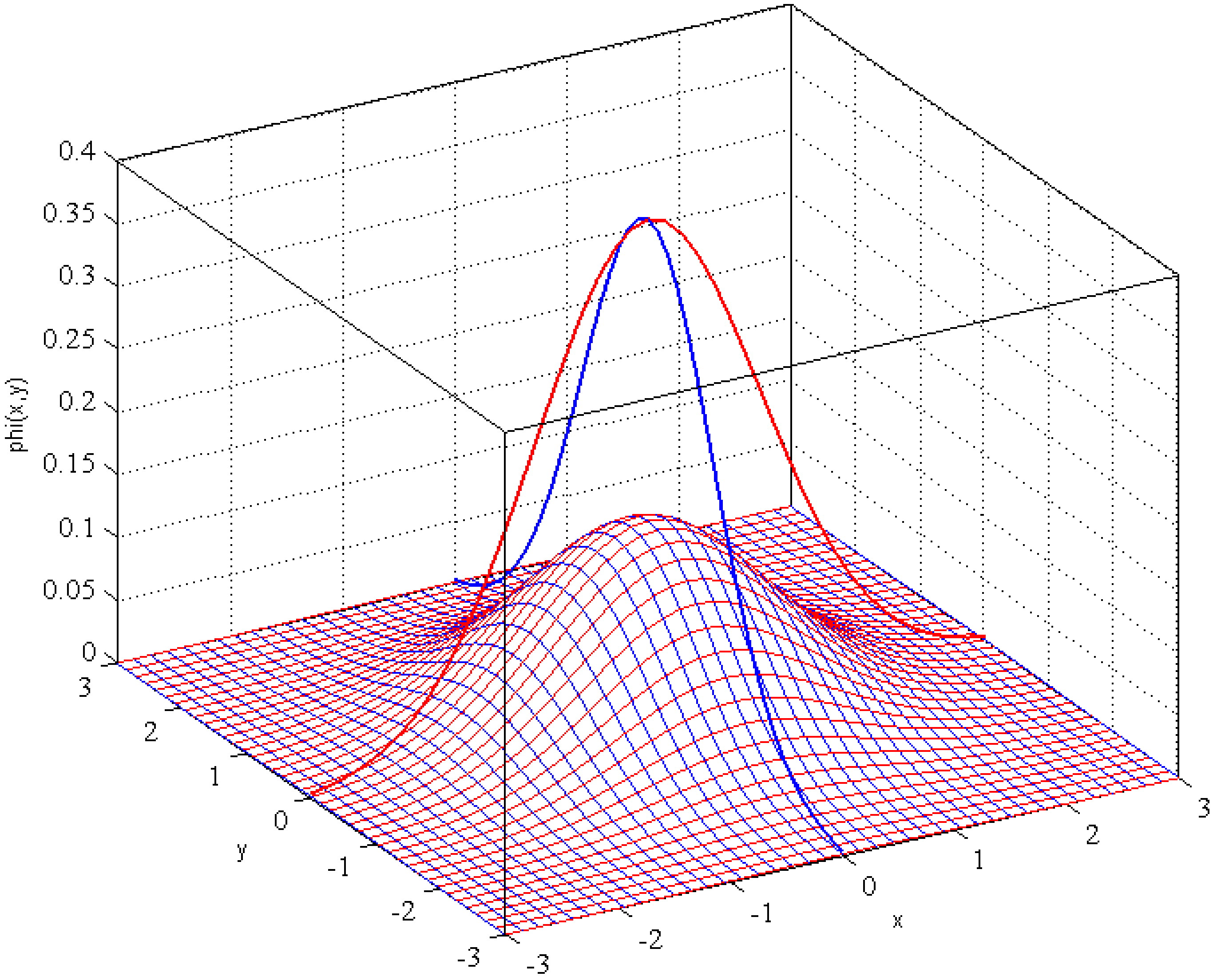
边缘分布律与边缘概率密度的关系

$$\boxed{p_{ij}\text{和}f(x,y)dxdy\text{作用相同}}$$

联合分布律与边缘分布律的关系

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

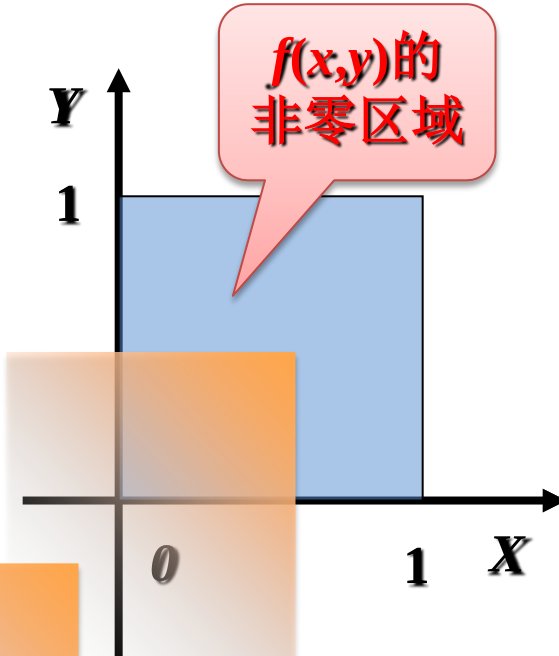
联合概率密度与边缘概率密度的关系



例3: 已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试写出(X,Y)的联合分布函数。



解：$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,dudv$

（1） 当 $x<0$ 或 $y<0$ 时

$$F(x,y)=0.$$

（2） 当 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ 时

$$F(x,y)=4\int_0^y\int_0^x uv\,dudv=x^2y^2.$$

（3）当 $0 \le x \le 1$，$y \ge 1$ 时

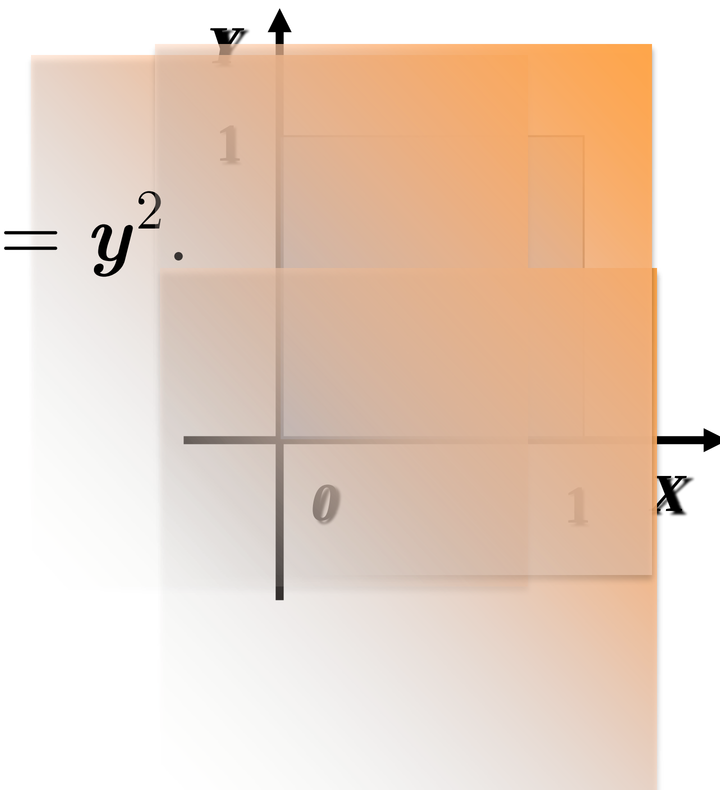
$$F(x,y) = 4\int_0^1 \int_0^x uv\,du dv = x^2.$$

（4）当 $0 \le y \le 1$，$x \ge 1$ 时

$$F(x,y) = 4\int_0^y \int_0^1 uv\,du dv = y^2.$$

（5）当 $x, y > 1$ 时

$$F(x,y) = 1.$$



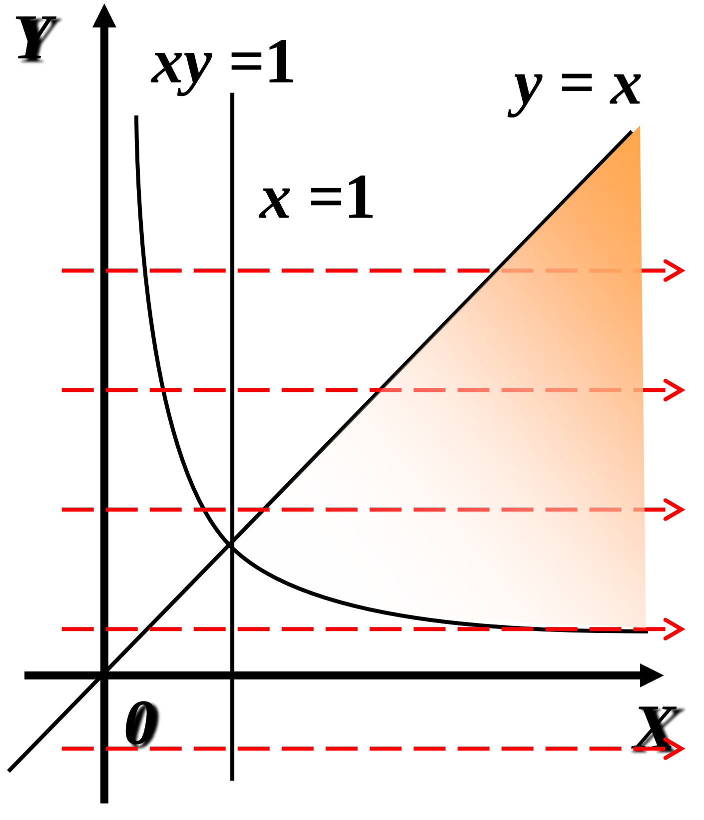
综上所述得:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}0, & \boldsymbol{x}<0 \text{ 或 } \boldsymbol{y}<0\\ \boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2, & 0\le \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\le 1\\ \boldsymbol{x}^2, & 0\le \boldsymbol{x}\le 1,\boldsymbol{y}\ge 1\\ \boldsymbol{y}^2, & \boldsymbol{x}\ge 1,0\le \boldsymbol{y}\le 1\\ 1, & \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>1\end{cases}$$

例4：已知二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2y}, & 1\le x<+\infty,\ \dfrac{1}{x}\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求关于Y的边缘概率密度$f_Y(y)$.



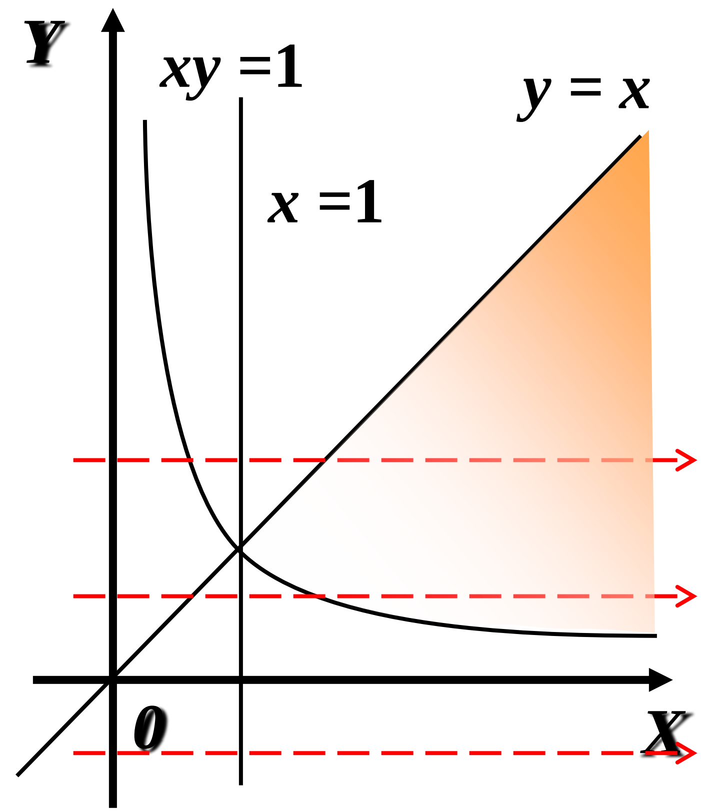
分析:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$$

解：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$=\begin{cases} 0, & y\le 0; \\ \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \frac{1}{2x^2y}\,dx, & 0<y\le 1; \\ \int_{y}^{+\infty} \frac{1}{2x^2y}\,dx, & 1<y. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & y\le 0; \\ {}^{1}\!/_{2}, & 0<y\le 1; \\ {}^{1}\!/_{2y^2}, & 1<y. \end{cases}$$



例5：已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} a(3x^2+xy), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

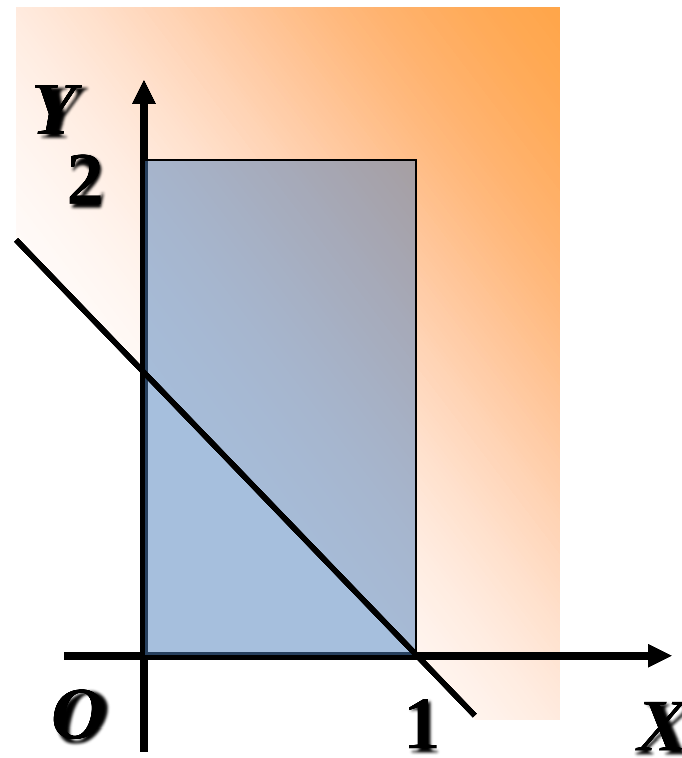
求(1) a；(2)边缘概率密度$f_Y(y)$；(3) $P\{X+Y>1\}$.

分析

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

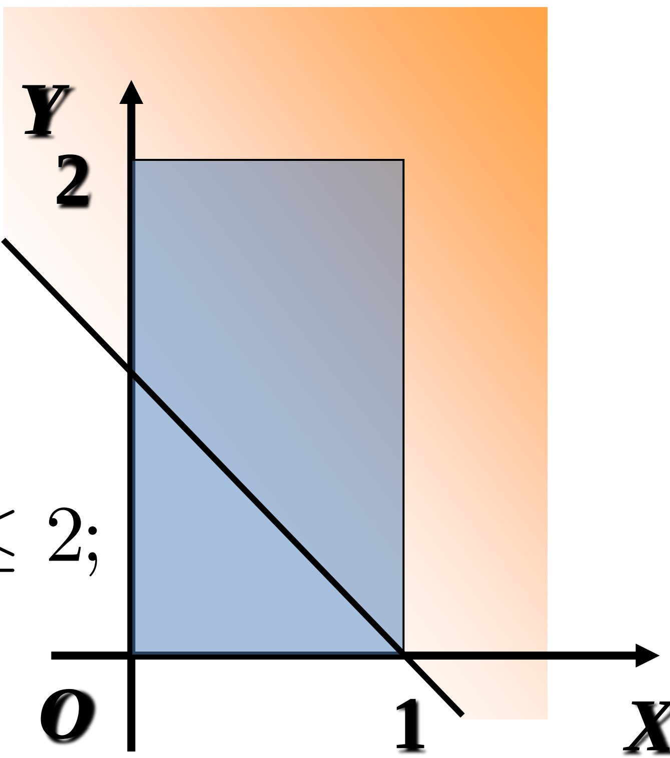
(3) $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)\,dxdy$



解：(1) 由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$ 得，

$$\int_0^1\left(\int_0^2 a(3x^2+xy)dy\right)dx = \int_0^1 (6ax^2+2ax)dx$$
$$= 3a = 1$$

所以$a = 1/3$.



(2) $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dx, & 0 \le y \le 2; \\ 0, & 2 < y. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \boldsymbol{y} < 0; \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\boldsymbol{y}, \quad 0 \leq \boldsymbol{y} \leq 2; \\ 0, \quad 2 < \boldsymbol{y}. \end{cases}$$

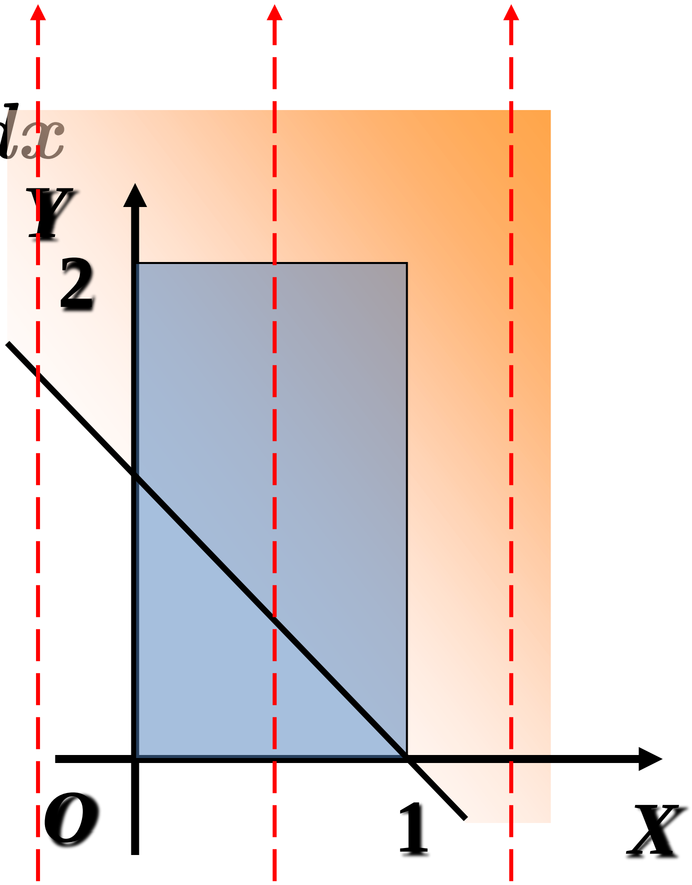
$$(3)\ P\{X+Y>1\}$$

$$= \iint\limits_{x+y>1} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{1-x}^2 \frac{1}{3}(3x^2 + xy)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x + \frac{4}{3}x^2 + \frac{5}{6}x^3 \right] dx$$

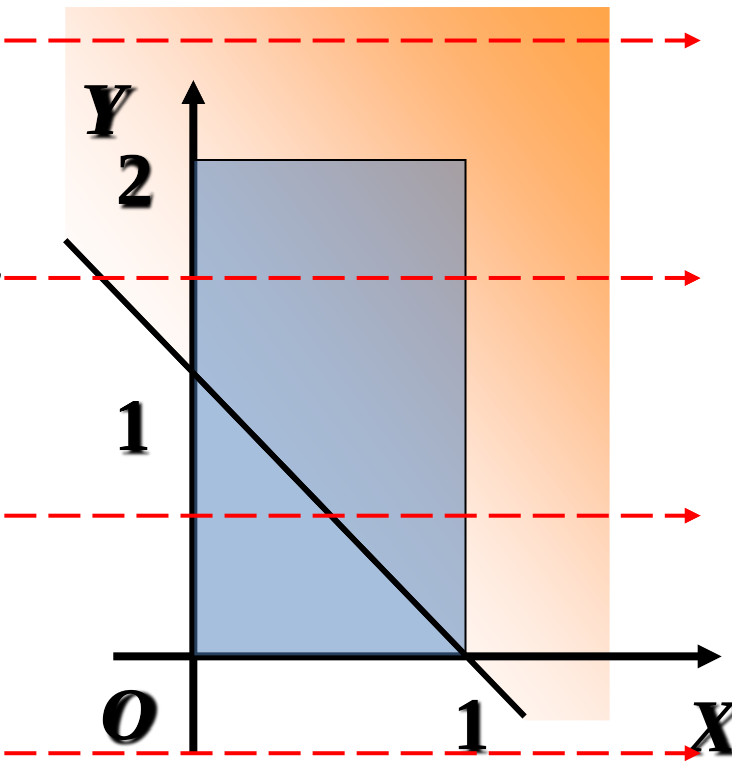
$$= \frac{65}{72}$$



注：先相关于y积分。

另解(3)：先相关于x积分。

$$P\{X+Y>1\}$$
$$=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)\,dxdy$$
$$=\int_0^1\left[\int_{1-y}^1 \frac{1}{3}(3x^2+xy)\,dx\right]dy$$
$$+\int_1^2\left[\int_0^1 \frac{1}{3}(3x^2+xy)\,dx\right]dy$$
$$=\frac{23}{72}+\frac{7}{12}$$
$$=\frac{65}{72}$$



总结： 对边缘概率密度的求解，实质上是**求带参变量的积分**，其难点是**定积分的上下限**，我们可以**通过图形**来很好的解决这个问题.

四. 二维均匀分布

设 $G \subset R^2$，面积为 $S(G)$，若二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布。

注：(X,Y) 在 G 上服从均匀分布，设 $D \subset G$，则有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D \frac{1}{S(G)}\,dxdy=\frac{S(D)}{S(G)}$$

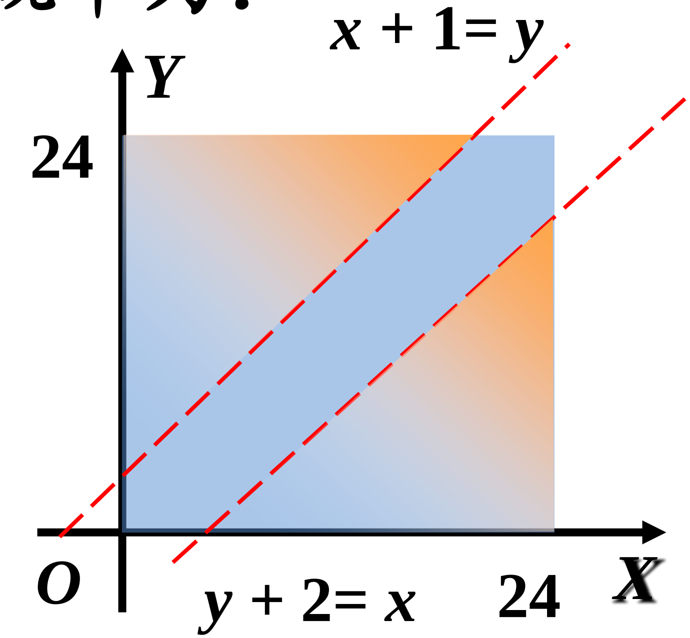
例6: 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊。它们在一昼夜内到达 的时刻是等可能的。如果甲的停泊时间为1小时，乙的停泊时间为二小时。求它们中的任意一艘都不须等待码头空出的概率。

分析: 设甲在一昼夜到达的时刻为X，乙在一昼夜到达的时刻为Y. 所求的概率为:

$$P\{X+1\le Y\text{或}Y+2\le X\}$$

设$G=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 24\}$,

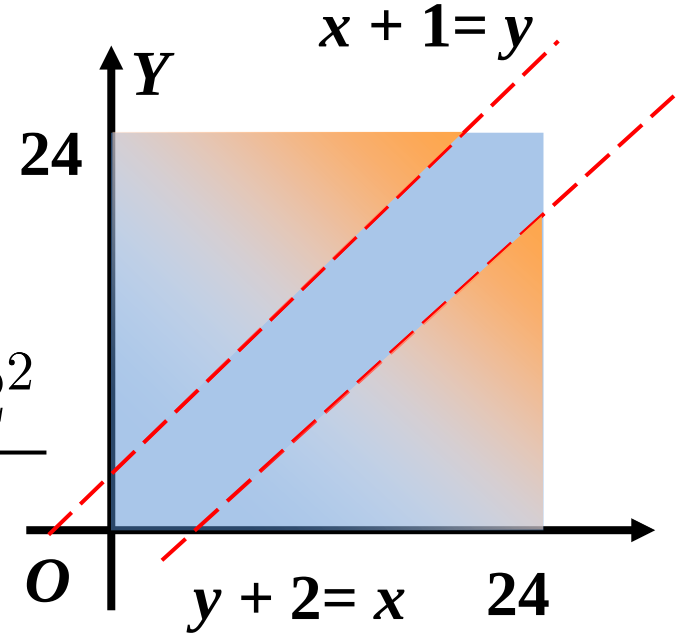
则(X,Y)在G上服从均匀分布。



解：设甲在一昼夜到达的时刻为X,乙在一昼夜到达的时刻为Y．所求的概率为：

$$P\{X+1\le Y \text{ 或 } Y+2\le X\}.$$

令 $G=\{(x,y)\,\big|\,0\le x,y\le 24\}$，则$(X,Y)$在$G$上服从均匀分布;令 $D=\{x+1\le y \text{ 或 } y+2\le x;\ 0\le x,y\le 24\}$,则有



$$P\{X+1\le Y \text{ 或 } Y+2\le X\}$$
$$=P\{(X,Y)\in D\}$$
$$=\frac{S(D)}{S(G)}=\frac{0.5\times 23^2+0.5\times 22^2}{24^2}$$
$$\approx 0.88$$

例7：把长为 l 的木棒，任意折成3段，求它们能构成一个三角形的概率。

分析:

(1) 可设第一段的长度为 X ,第二段的长度为 Y，则有

$$0 < x < l, 0 < y < l, x + y < l$$

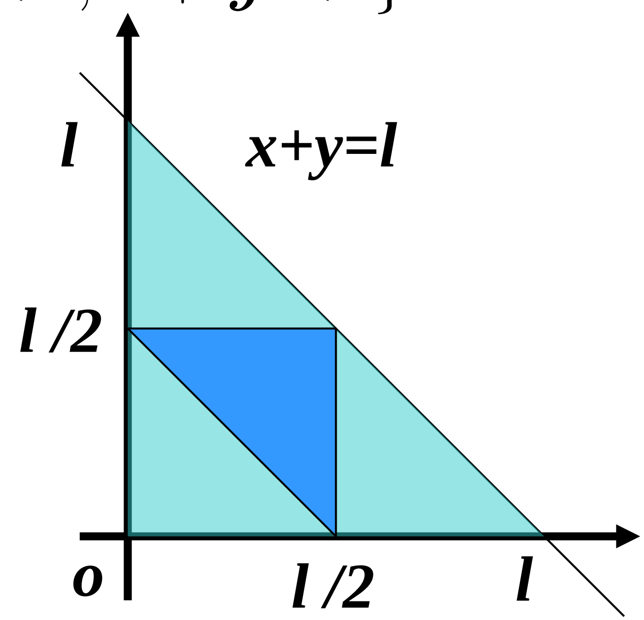
(2) (X,Y)在三角形

$$G = \{(x,y) \mid 0 < x < l, 0 < y < l, x + y < l\}$$

上服从均匀分布。

(3) 能构成三角形的充要条件为:

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{l}{2} \\ 0 < y < \frac{l}{2} \\ \frac{l}{2} < x + y < l \end{cases}$$



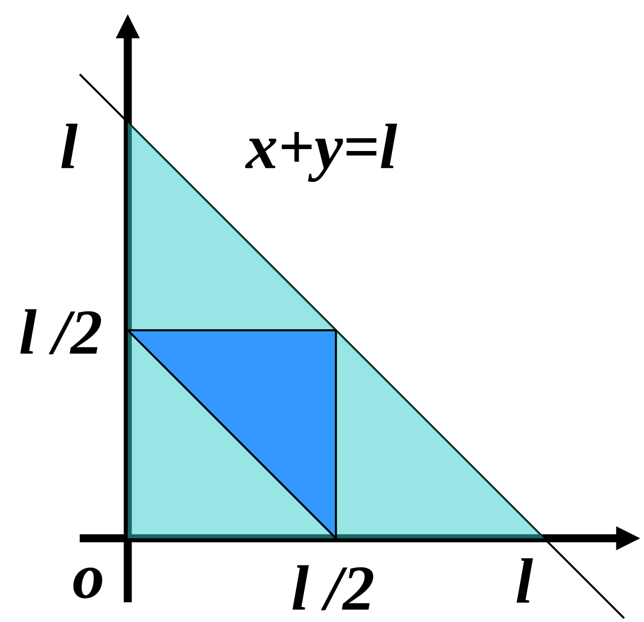
解：设第一段的长度为$\boldsymbol{X}$，第二段的长度为$\boldsymbol{Y}$，则$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$在

$$\boldsymbol{G}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid 0<\boldsymbol{x}<\boldsymbol{l},0<\boldsymbol{y}<\boldsymbol{l},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}<\boldsymbol{l}\}$$

上服从均匀分布。所以所求概率为，

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{x}<\boldsymbol{l}/2,\boldsymbol{y}<\boldsymbol{l}/2,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}<\boldsymbol{l}/2\}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{l}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\boldsymbol{l}^2}=\frac{1}{4}.$$



五. 二维正态分布

定义：二维随机变量$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的联合概率密度为

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(\boldsymbol{x}-\mu_1)^2}{{\sigma_1}^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\rho\frac{(\boldsymbol{x}-\mu_1)(\boldsymbol{y}-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(\boldsymbol{y}-\mu_2)^2}{{\sigma_2}^2}\right]\right\},\quad \boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}.$$

这里，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$,则称$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$服从二维正态分布，记为$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\sim \boldsymbol{N}(\mu_1,{\sigma_1}^2;\mu_2,{\sigma_2}^2;\rho)$.

例8：设 (X,Y)服从二维正态分布 $N(0,1;0,1;\rho)$，求 X,Y 的边缘概率密度.

解：因为(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)},x,y\in R$$

所以，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}dy$$

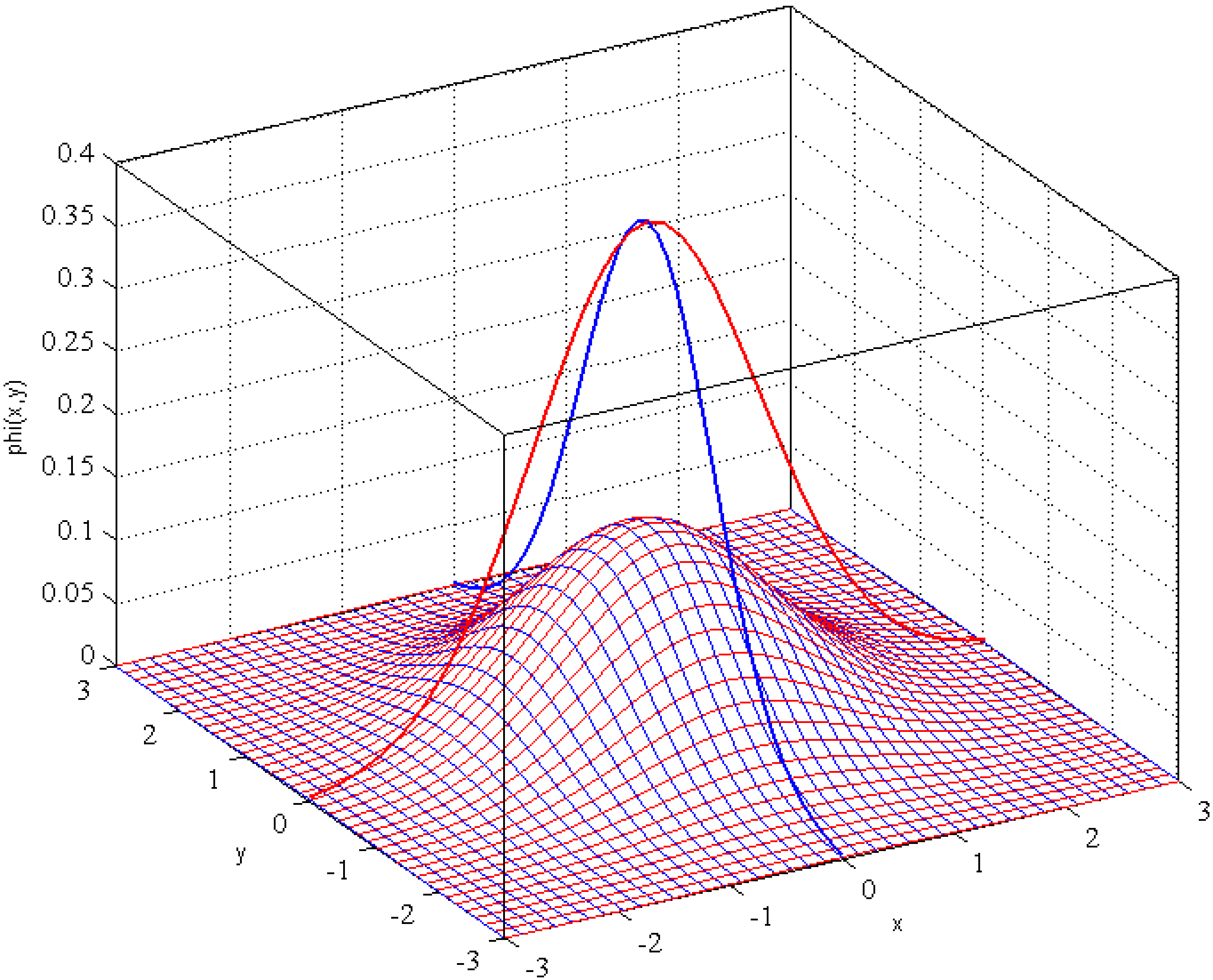
$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}dy$$

$$\xrightarrow{\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}=t}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

即$X\sim N(0,1)$.

命题 若二维随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2{}^2,\rho)$,
则$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.



phi(x,y)
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
3
2
1
0
y
-1
-2
-3
-3
-2
-1
0
x
1
2
3

注：（1）二维正态分布的边缘分布为正态分布.

（2）正态分布的联合概率密度与ρ有关.
边缘概率密度与ρ无关.

（3）边缘分布不能唯一确定联合分布.

练习：设二维随机变量$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases} 6x, & if\ 0\le x\le y\le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases},$$

则$P\{X+Y\le 1\}$.

答：$P\{X+Y\le 1\}=\dfrac{1}{4}$.

第三章　多维随机变量

第二节 随机变量的独立性

1、二维随机变量的独立性

2、判定独立性的等价条件

3、多维随机变量的独立性

4、小结、思考

一. 二维随机变量的独立性

定义: 设(X,Y)是二维随机变量, 若对任意实数对(x,y)均有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$$

成立，称X与Y相互独立。

意义: 对任意实数对(x,y)，随机事件$\{X \le x\}$与随机事件$\{Y \le y\}$相互独立。

例 1 设随机变量X的概率密度为：

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad x\in R$$

问X与$|X|$是否相互独立。

分析:

若X与$|X|$相互独立，则对$\forall a,b$，有

$$P\{X\le a,|X|\le b\}=P\{X\le a\}P\{|X|\le b\}.$$

若X与$|X|$不相互独立，取$a=b$，随机事件$\{X\le a\}$与$\{|X|\le a\}$有如下关系：

$$\{|X|\le a\}=\{-a\le X\le a\}\subset\{X\le a\}$$

解：对于任意给定的实数 $a>0$ 有

$$\{|\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{a}\} \subset \{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}\}$$

从而 $\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}, |\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{a}\} = \boldsymbol{P}\{|\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{a}\}$

因为

$$0 < \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}\} < 1, \quad 0 < \boldsymbol{P}\{|\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{a}\} < 1$$

所以

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}, |\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{a}\} \\ &= \boldsymbol{P}\{|\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{a}\} \\ &> \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{a}\}\boldsymbol{P}\{|\boldsymbol{X}| \leq \boldsymbol{a}\}. \end{aligned}$$

即 X 与 $|X|$ 不相互独立。

判定R.V. X,Y相互独立的若干等价条件:

对于$\forall(x,y)\in R^2$,

(1)$P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$;

(2)$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$;

(3)对于离散型$R.V.\ X,Y$,有$p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}$;

(4)对于连续型$R.V.\ X,Y$,在平面上除去"面积"为0的集合外,有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$;

例2 已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为:

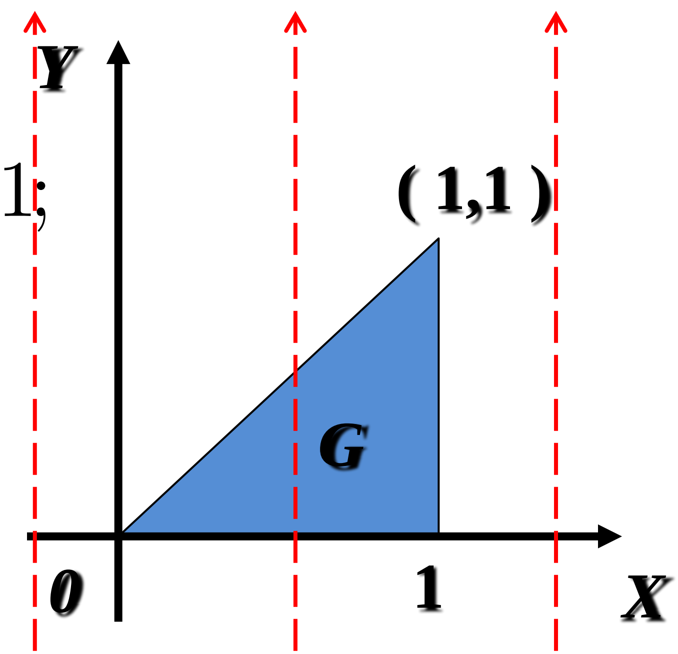
$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & if \quad 0\le y\le x\le 1\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

问 X,Y 是否相互独立?

解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } x>1;\\ \int_0^x 8xydy, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } x>1;\\ 4x^3, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

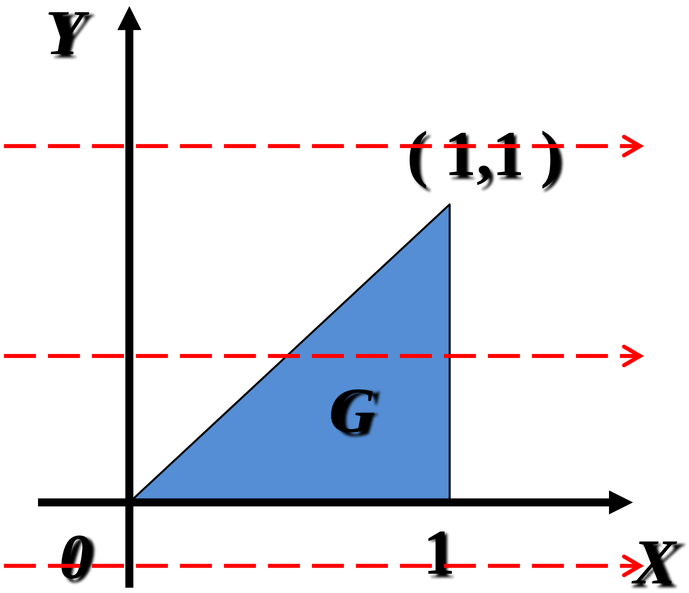


同理

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ 或 } y > 1; \\ 4y - 4y^3, & 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

令 $G = \{(x,y) \mid 0 \le y \le x \le 1\}$,



在区域G中,

$$f(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

故 X, Y不相互独立。

例 2： 若随机变量$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$相互独立, $\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}(0,\boldsymbol{a})$, $\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{U}(0,\pi/2)$, 且$0<\boldsymbol{b}<\boldsymbol{a}$, 试求$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}<\boldsymbol{b}\cos\boldsymbol{Y}\}$.

解:
$$f_X(x)=\begin{cases}1/a, & 0<x<a;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}2/\pi, & 0<y<\pi/2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

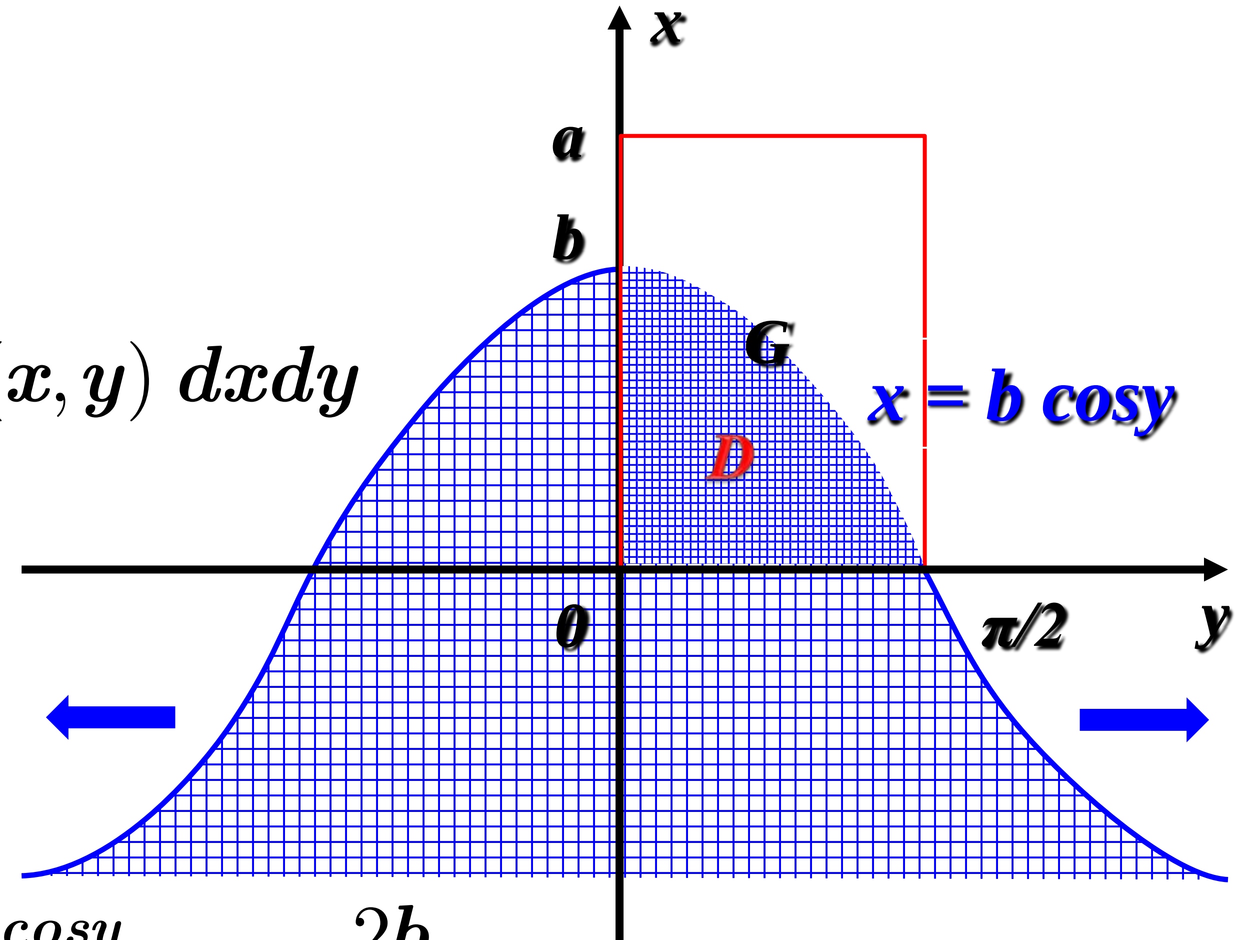
因为随机变量$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$相互独立,则

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}2/a\pi, & 0<x<a, 0<y<\pi/2;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以

$$P\{X < b\cos Y\}$$

$$= \iint\limits_{\{(x,y)|x<b\cos y\}} f(x,y)\,dxdy$$



$$= \iint\limits_{D} \frac{2}{a\pi}\,dxdy$$

$$= \frac{2}{a\pi}\int_0^{\pi/2} dy \int_0^{bcosy} dx = \frac{2b}{a\pi}.$$

实际上,根据

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 2\big/a\pi, & (x,y)\in G; \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

可知,2维随机变量(X,Y)在G上服从二维均匀分布,

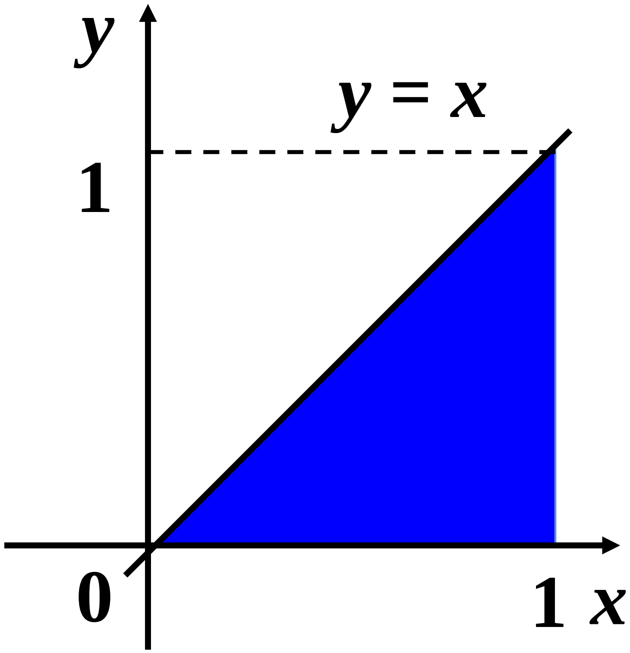
所以

$$P\{X<b\cos Y\}=\frac{S(D)}{S(G)}=\frac{b}{\frac{a\pi}{2}}.$$

例3 设随机变量(X, Y)具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1, 0<y<x;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

试问X，Y是否相互独立?



解:

因为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy, \quad -\infty < x < +\infty,$$

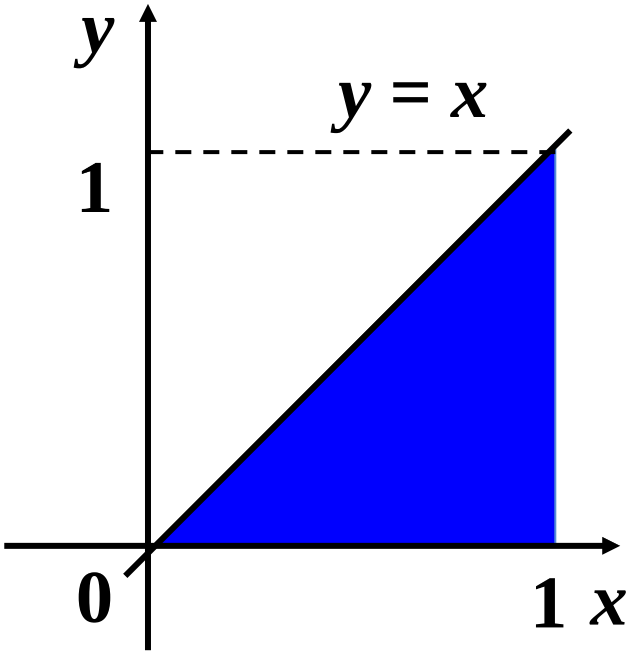
所以

当$x \le 0$或$x \ge 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$$

当$0 < x < 1$时,

$$f_X(x) = \int_0^x 2dy = 2x$$

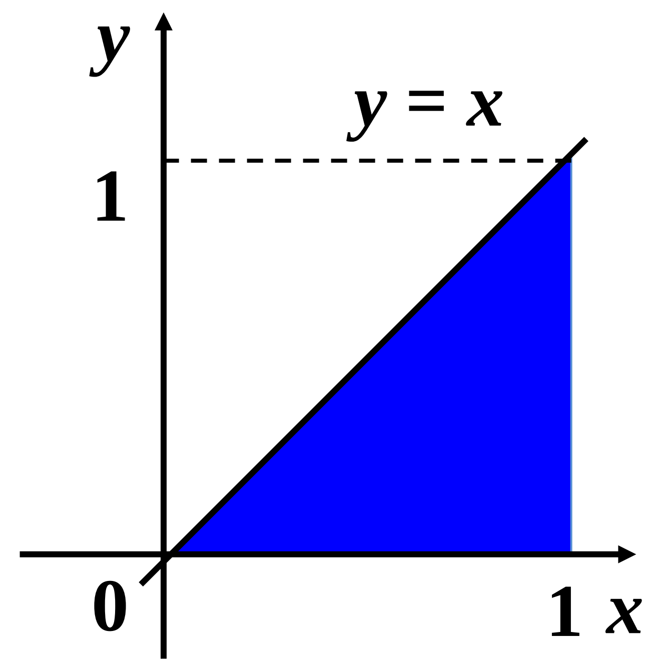


类似地,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \ , \quad -\infty < y < +\infty$$

当$y \le 0$或$y \ge 1$时,

$$f_X(x) = \int_0^x 2dy = 2x$$



当$0 < y < 1$时,

$$f_Y(y) = \int_y^1 2dx = 2(1-y)$$

于是,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

故当$0 < x < 1$且$0 < y < x$时,

$$2 = f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y) = 4x(1-y),$$

因此, X 与 Y 不相互独立.

二. 多维随机变量的独立性

定义：设n维随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的联合分布函数为$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，若对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$均有

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).$$

则称随机变量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$相互独立。

注意：$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$= P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

定理： 若$\boldsymbol{n}$维随机变量$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$相互独立,则

(1)任意$\boldsymbol{k}$个随机变量$(2 \le \boldsymbol{k} \le \boldsymbol{n})$也相互独立;

(2)若函数$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{X}_1), \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{X}_2), \ldots, \boldsymbol{g}_n(\boldsymbol{X}_n)$是随机变量, 则它们也相互独立;

(3)若$\boldsymbol{m}$维随机变量$(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_m)$与$\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$维随机变量$(\boldsymbol{X}_{m+1}, \boldsymbol{X}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$相互独立, 且$\boldsymbol{h}, \boldsymbol{g}$是连续函数, 则随机变量

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_m)\text{与}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_{m+1}, \boldsymbol{X}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$$

相互独立.

注：

(1)对$\forall(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)\in \boldsymbol{R}^{m+n}$，都有

$$\boldsymbol{F}(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=\boldsymbol{F}(x_1,x_2,\cdots,x_m)\boldsymbol{F}(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

成立，则称$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_m)$与$(\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2,\ldots,\boldsymbol{Y}_n)$相互独立；

(2)若$\boldsymbol{n}$维随机变量$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_n)$相互独立，则$(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\ldots,\boldsymbol{X}_m)$与$(\boldsymbol{X}_{m+1},\boldsymbol{X}_{m+2},\ldots,\boldsymbol{X}_n)$相互独立，这里$1\le \boldsymbol{m}\le \boldsymbol{n}$.

(3)连续函数将随机变量映射成随机变量.

例4：若三维随机变量（X_1, X_2, X_3）相互独立，则

X_1^2, X_2^2, X_3^2 也相互独立.

X_1+X_2 与 X_3 也相互独立.

$\sin X_1$ 与 X_3 也相互独立.

X_1+X_2 与 X_1-X_2 不一定相互独立.

练习：设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为:

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立,则

$a=$ <u>0.4</u>，$b=$ <u>0.1</u> 。

第三章　多维随机变量

第三节 条件分布

1、条件分布函数

2、条件分布律

3、条件概率密度

4、小结、思考

一、条件分布函数

在二维$R.V.(X,Y)$中，一个$R.V.Y$取某个确定值y_0的条件下，另一个$R.V.X$的分布如何?

$$P\{X \le x \mid Y = y_0\}$$

由于不能保证$P\{Y=y_0\}>0$，所以在一般情况下，就不能用条件概率的定义来直接定义条件分布函数。

这时需**采用极限的方法**来定义条件分布函数。

定义：给定$\boldsymbol{y}_0 \in \boldsymbol{R}$，对任意$\Delta \boldsymbol{y} > 0$有

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{y}_0 - \Delta \boldsymbol{y} < \boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{y}_0\} > 0,$$

且对任意的$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$，极限

$$\lim_{\Delta \boldsymbol{y} \to 0+} \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X} \le \boldsymbol{x} \big| \boldsymbol{y}_0 - \Delta \boldsymbol{y} < \boldsymbol{Y} \le \boldsymbol{y}_0\}$$

存在，称此极限函数为在$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}_0$的条件下，$\boldsymbol{R.V.}$ $\boldsymbol{X}$的条件分布函数，记作

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}_0)。$$

二、条件分布律

设(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \qquad i,j=1,2,\cdots$$

若$P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i \,\middle|\, Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \qquad i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$的条件下，$R.V.X$的条件分布律。

条件分布律的性质:

(1) $P\{X=x_i \mid Y=y_j\} \geq 0, \quad i=1,2,\cdots;$

(2) $\sum_{i=1}^{+\infty} P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=1.$

判断两个离散型R.V.X,Y相互独立的方法:

(1) $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y), \quad (x,y)\in R^2;$

(2) $p_{ij}=p_{i\bullet}p_{\bullet j}, \quad i,j=1,2,\cdots;$

(3) $P\{X=i\}=P\{X=i \mid Y=j\}, \quad i,j=1,2,\cdots;$

(4) $P\{Y=j\}=P\{Y=j \mid X=i\}, \quad i,j=1,2,\cdots.$

例1：在**1,2,3,4** 中随机取出一数 $\boldsymbol{X}$，再随机地从**1~*X***中取一数$\boldsymbol{Y}$，求在$\boldsymbol{X}$**=3**的条件下，$\boldsymbol{Y}$的条件分布律。

解: 由古典概率有

$$P\{Y = j \big| X = 3\} = \frac{1}{3}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

例2 某射手进行射击，击中目标两次则停止射击，每次的命中率为 p $(0<p<1)$，令 X 表示第一次命中目标时的射击次数，令 Y 表示第二次命中目标时的射击次数，求条件分布律

$$P\{X=i \mid Y=j\}.$$

解：由题意得

$$P\{X=i,Y=j\}=p^2(1-p)^{j-2},$$

$$1<i\le j; j=2,3,\cdots$$

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}p^2(1-p)^{j-2}$$

$$=(j-1)p^2(1-p)^{j-2},\qquad j=2,3,\cdots;$$

所以当$j=2,3,\cdots$时,条件分布律存在,且有

$$P\{X=i\big|Y=j\}=P\{X=i,Y=j\}\,/\,P\{Y=j\}$$

$$=p^2(1-p)^{j-2}\,/\left((j-1)p^2(1-p)^{j-2}\right)=\frac{1}{j-1}.$$

$i=1,2,\cdots,j-1.$

例3 某矿山一年内发生的事故总数$X \sim P(\lambda)$,一个事故是致命的概率为p $(0<p<1)$，设一年内发生致命事故的次数为Y, 试写出Y的分布律.

解： 已知

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda},\ k=0,1,2,\cdots;$$

在发生$\boldsymbol{k}$次事故的条件下，$\boldsymbol{Y}$的条件分布律为

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{m}\big|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}\}=\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{m}}(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m}},$$

$$\boldsymbol{m}=0,1,2,\cdots,\boldsymbol{k};$$

故$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的联合分布律为

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{m}\}=\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}\}\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{m}\big|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{k}\}$$

$$=\frac{\lambda^{\boldsymbol{k}}}{\boldsymbol{k}!}\boldsymbol{e}^{-\lambda}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{m}}(1-\boldsymbol{p})^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{m}},$$

$$0\le\boldsymbol{m}\le\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{k}=0,1,2,\cdots$$

$\boldsymbol{Y}$的分布律为

$$\begin{aligned}
P\{Y=m\} &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} C_k^m p^m (1-p)^{k-m} \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^{k-m}}{(k-m)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p}, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

例4 记X为某医院一天出生的婴儿个数，记Y为男婴的个数设(X,Y)的联合分布律为：

$$P\left\{X=i,Y=j\right\}=\frac{e^{-14}\left(7.14\right)^{j}\left(6.86\right)^{i-j}}{j!\left(i-j\right)!};$$

$$j=0,1,\cdots,i,\qquad i=0,1,\cdots,$$

求：

（1）边缘分布律；

（2）条件分布律;

（3）X=20时Y的条件分布律.

解：

$$(1)\,\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i}\right\}=\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{Y}<+\infty\right\}=\sum_{j=0}^{i}\boldsymbol{p}_{ij}$$

$$=\frac{\boldsymbol{e}^{-14}}{\boldsymbol{i}\,!}\sum_{j=0}^{i}\frac{\boldsymbol{i}\,!\left(7.14\right)^{j}\left(6.86\right)^{i-j}}{\boldsymbol{j}\,!\left(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\right)!}$$

$$=\frac{\boldsymbol{e}^{-14}}{\boldsymbol{i}\,!}\left(7.14+6.86\right)^{i}$$

$$=\frac{14^{i}}{\boldsymbol{i}\,!}\boldsymbol{e}^{-14},\qquad \boldsymbol{i}=0,1,\cdots$$

即 $\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{P}(14)$;

$$P\left\{Y=j\right\}=P\left\{X<+\infty,Y=j\right\}=\sum_{i=j}^{+\infty}p_{ij}$$

$$=\frac{e^{-14}}{j!}\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{\left(7.14\right)^{j}\left(6.86\right)^{i-j}}{\left(i-j\right)!}$$

$$=\frac{e^{-14}}{j!}\left(7.14\right)^{j}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{6.86^{k}}{k!}$$

$$=\frac{\left(7.14\right)^{j}}{j!}e^{-7.14},\quad j=0,1,\cdots$$

即 $Y\sim P(7.14)$;

$$(2)\ \boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i}\middle|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{j}\right\}=\frac{\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{j}\}}{\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{j}\}}$$

$$=\frac{\boldsymbol{e}^{-6.86}\left(6.86\right)^{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}}{\left(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\right)!},\qquad \boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{j}+1,\cdots$$

$$\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{j}\middle|\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i}\right\}=\frac{\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{j}\}}{\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{i}\}}$$

$$=\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{j}}\left(\frac{7.14}{14}\right)^{\boldsymbol{j}}\left(\frac{6.86}{14}\right)^{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}},\qquad \boldsymbol{j}=0,1,\cdots\boldsymbol{i}.$$

$$(3)\ P\left\{Y=j \middle| X=20\right\}=\frac{P\{X=20, Y=j\}}{P\{X=20\}}$$

$$=C_{20}^{j}\left(\frac{7.14}{14}\right)^{j}\left(\frac{6.86}{14}\right)^{20-j}, \qquad j=0,1,\cdots 20.$$

即 $Y \sim B\left(20, \dfrac{7.14}{14}\right)$.

思考：随机变量 X 与 Y 是否相互独立?

$$P\left\{X=i\right\} \neq \frac{P\left\{X=i, Y=j\right\}}{P\left\{Y=j\right\}}=P\left\{X=i \middle| Y=j\right\}$$

三、条件概率密度

设(X,Y)是连续型$R.V.$，且满足$f(x,y)$，$f_Y(y)$ 在(x,y_0)附近连续，且$f_Y(y_0)>0$ 则有

$$F_{X|Y}\left(x\middle|y_0\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y_0)}{f_Y(y_0)}du.$$

证明：

$$F_{X|Y}\left(x\middle|y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0+}P\left\{X\le x\middle|y_0-\Delta y<Y\le y_0\right\}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0+}\frac{P\left\{X\le x,y_0-\Delta y<Y\le y_0\right\}}{P\left\{y_0-\Delta y<Y\le y_0\right\}}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0+} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y_0 - \Delta y}^{y_0} f(u, v) du dv}{\int_{y_0 - \Delta y}^{y_0} f_Y(v) dv}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0+} \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u, y_0 - \theta_1 \Delta y) \Delta y du}{f_Y(y_0 - \theta_2 \Delta y) \Delta y}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{f\left(u, y_0\right)}{f_Y\left(y_0\right)} du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x \mid y_0) du.$$

我们称

$$f_{X|Y}\left(x\middle|y_0\right)=F'_{X|Y}\left(x\middle|y_0\right)=\frac{f\left(x,y_0\right)}{f_Y\left(y_0\right)}$$

为在$Y=y_0$的条件下R.V.X 的条件概率密度;

$$f_{Y|X}\left(y\middle|x_0\right)=F'_{Y|X}\left(y\middle|x_0\right)=\frac{f\left(x_0,y\right)}{f_X\left(x_0\right)}$$

为在$X=x_0$的条件下R.V.Y的条件概率密度;

$$P\{a < X \le b \mid Y = y_0\} = \int_a^b f_{X|Y}\left(x \middle| y_0\right) dx$$

为在Y=y_0 的条件下，事件{a<X≤b }的条件概率。

判断两个连续型*R.V.X,Y*相互独立的方法:

$$(1)\ F(x,y)=F_X(x)F_Y(y);$$

$$(2)\ f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$(3)\ f_X(x)=f_{X|Y}(x\mid y)$$

$$(4)\ f_Y(y)=f_{Y|X}(y\mid x)$$

例1 设(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1, 0<y<x;\\ 0, & 其他\end{cases}$$

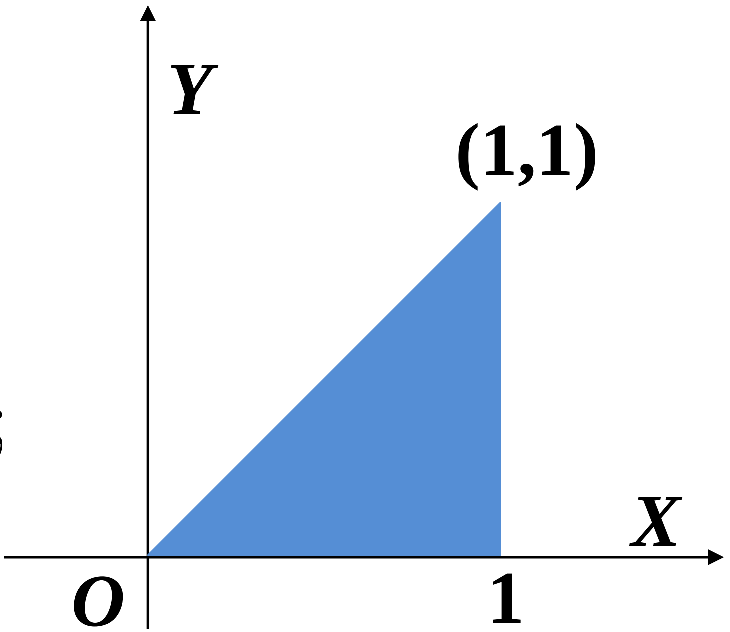
求(1)$P\{Y<1/8 \mid X=1/4\}$;

(2)$P\{Y<1/8 \mid X=1/10\}$.

解：X的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 3xdy=3x^2, & 0\le x\le 1;\\ 0, & 其他\end{cases}$$



当$0 < \boldsymbol{x}_0 \le 1$时，$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}_0) > 0$，条件概率$\boldsymbol{f_{Y|X}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_0)$有意义，

故

$$\boldsymbol{f_{Y|X}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_0) = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y})}{\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}_0)} = \begin{cases} \dfrac{3\boldsymbol{x}_0}{3{\boldsymbol{x}_0}^2} = \dfrac{1}{\boldsymbol{x}_0}, & 0 < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}_0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以 (1)$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y} \le 1/8 | \boldsymbol{X} = 1/4\}$

$$= \boldsymbol{F_{Y|X}}\{\boldsymbol{y} = 1/8 | \boldsymbol{x}_0 = 1/4\}$$

$$= \int_{-\infty}^{1/8} \boldsymbol{f_{Y|X}}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{x}_0 = 1/4)\boldsymbol{dy}$$

$$= \int_0^{1/8} 4\boldsymbol{dy}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

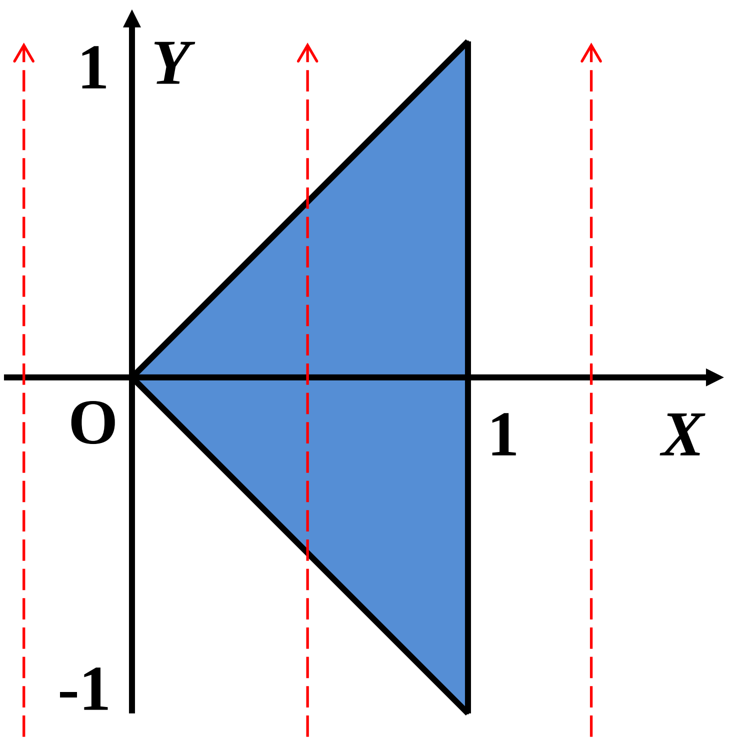
$$
\begin{aligned}
(2)&\boldsymbol{P}\left\{\boldsymbol{Y} \leq 1/8 \middle| \boldsymbol{X} = 1/10\right\} \\
&= \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}\left\{\boldsymbol{y} = 1/8 \middle| \boldsymbol{x}_0 = 1/10\right\} \\
&= \int_{-\infty}^{1/8} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}\left(\boldsymbol{y} \middle| \boldsymbol{x}_0 = 1/10\right)\boldsymbol{dy} \\
&= \int_{0}^{1/10} 10\boldsymbol{dy} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

例2 设(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1; \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求(1)条件概率密度;(2)$P\{|Y|<1/3 \mid X=1/2\}$.

解：(1)先求X,Y的边缘概率密度

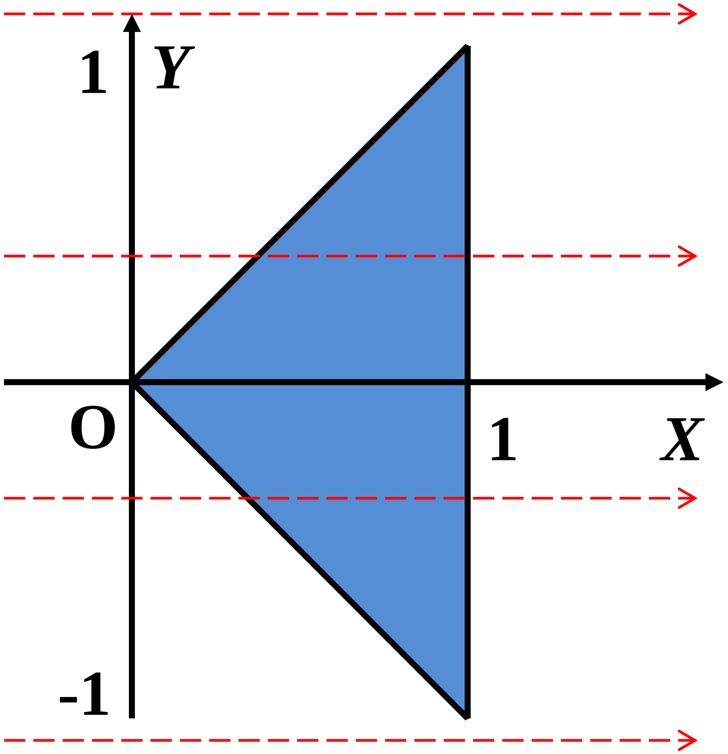


$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{x} 1\,dy=2x, & 0<x<1; \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$=\begin{cases} \int_{-y}^{1} 1dx = 1+y, & -1<y<0; \\ \int_{y}^{1} 1dx = 1-y, & 0<y<1; \\ 0, & 其它. \end{cases}$$



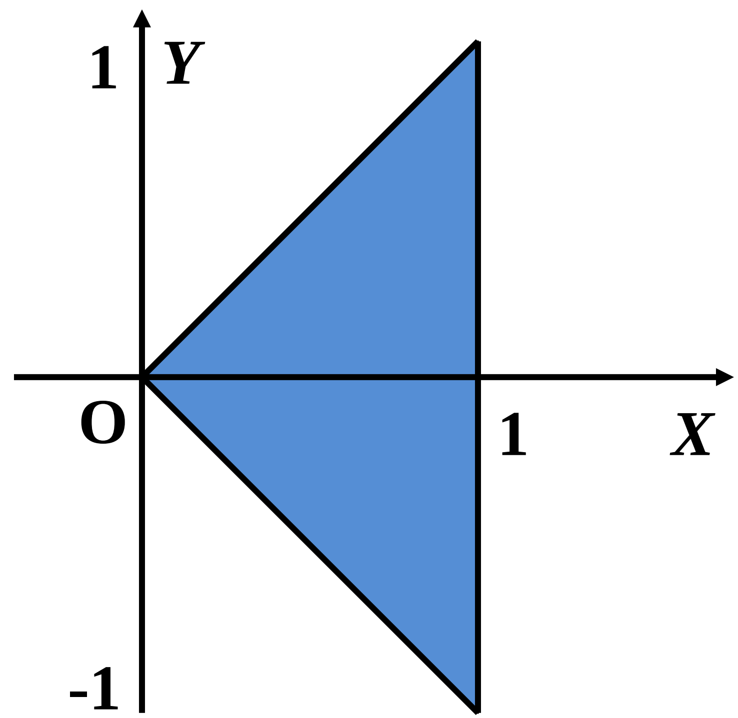
所以当$0 < x < 1$时, $f_X(x) > 0$, $f_{Y|X}(y|x)$有意义, 故

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & -x < y < x; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

当$-1 < y < 1$时, $f_Y(y) > 0$, $f_{X|Y}(x|y)$有意义, 故

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-|y|}, & -x < y < x < 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



$$(2)\boldsymbol{P}\{|\boldsymbol{Y}|<1/3 \mid \boldsymbol{X}=1/2\}$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y} \mid 1/2)\boldsymbol{dy}$$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} 1\boldsymbol{dy}$$

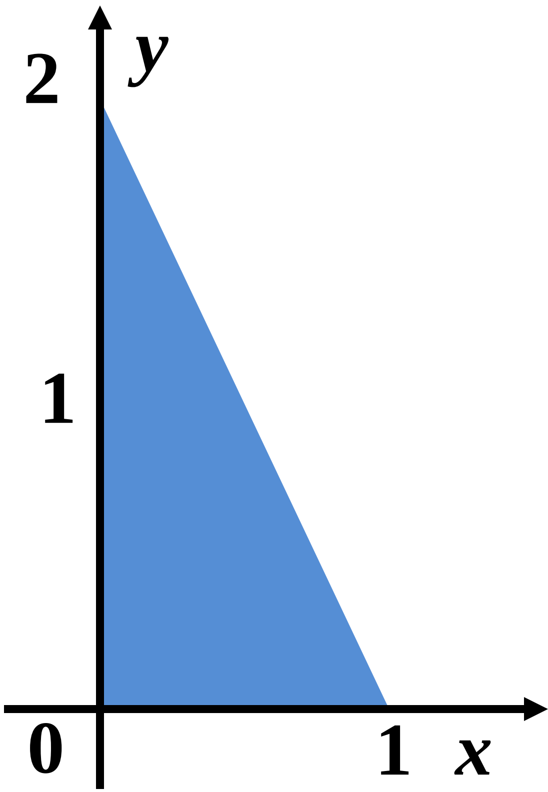
$$=\frac{2}{3}$$

例3: 随机变量(X,Y)在D上服从均匀分布,

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le x+\frac{y}{2}\le 1\}$$

试求$f_{X|Y}(x\mid y)$和$f_{Y|X}(y\mid x)$.

解: $$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{2(1-x)}dy=2(1-x), & 0<x<1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

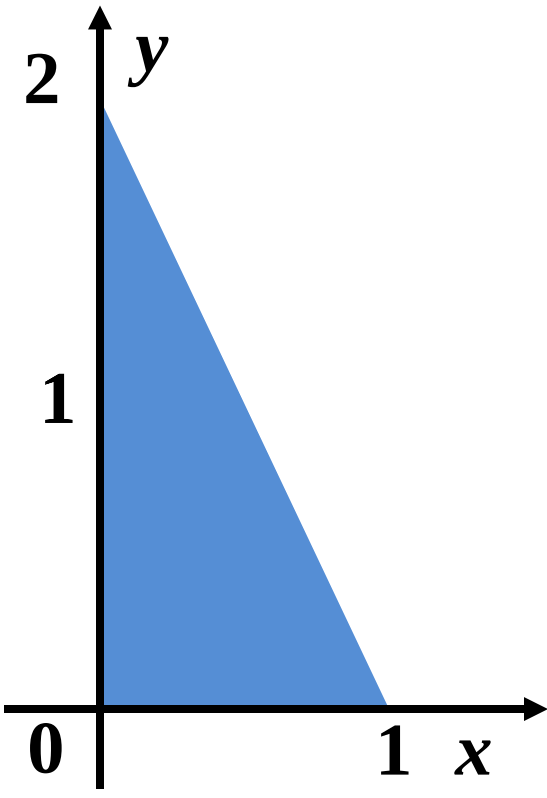
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$= \begin{cases} \int_0^{1-\frac{y}{2}} dx = 1 - \dfrac{y}{2} & 0 < y < 2; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

所以当$0 < x < 1$时，$f_{Y|X}(y|x)$有意义，故

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)}, & 0 < y < 2(1-x); \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



所以当$0<y<2$时, $f_{X|Y}(x|y)$有意义, 故

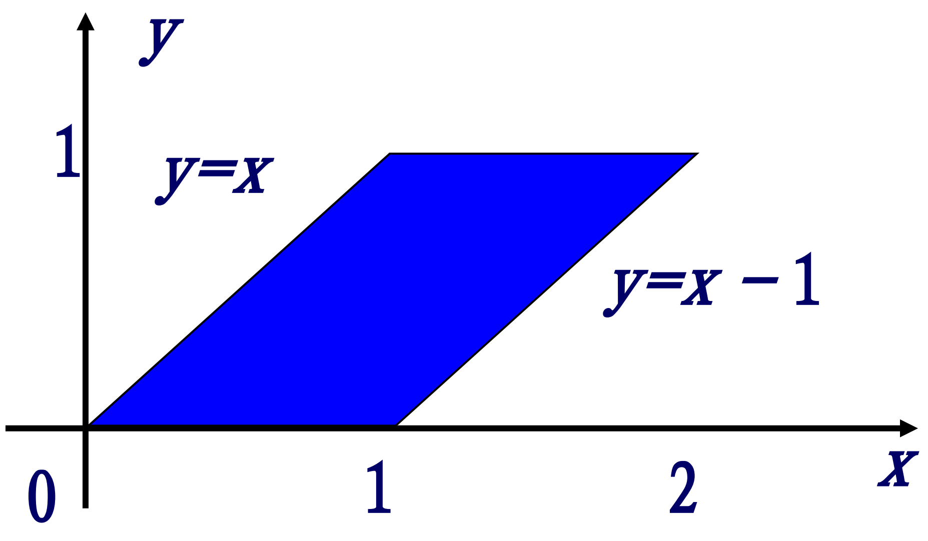
$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\dfrac{y}{2}}, & 0<x<1-\dfrac{y}{2}; \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例4 设（X, Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 2,\max(0,x-1)\le y\le \min(1,x);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

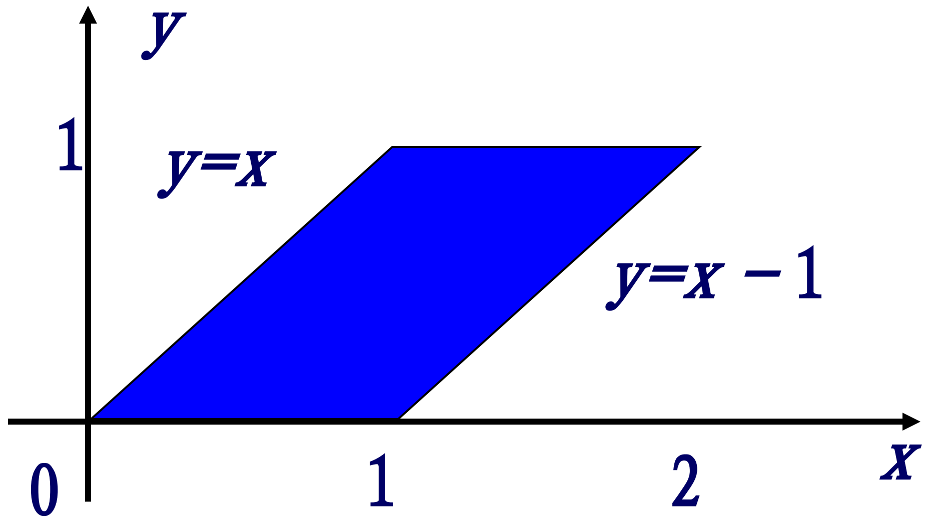
试求$f_{Y|X}(y|x)$, 并计算概率 $P\{0<Y<0.5|X=0.5\}$和

$P\{0<Y<0.5|X=1.2\}$.



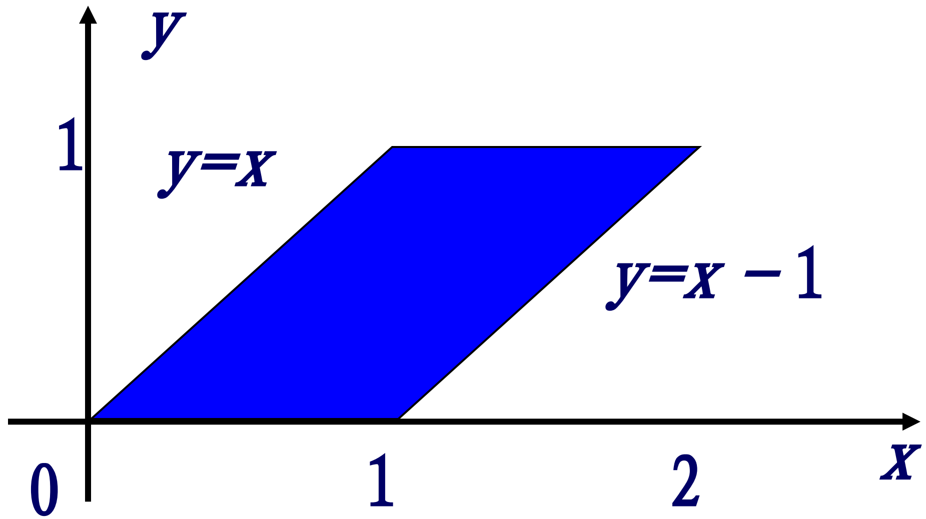
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases} \int_0^x dy = x, & 0 \le x \le 1; \\ \int_{x-1}^1 dy = 2-x, & 1 < x \le 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



当$0 < x \le 1$时，$f_X(x) > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x; \\ 0, & 其它。\end{cases}$$



当 $1 < x < 2$时，$f_X(x) = 2 - x > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x}, & x-1 < y < 1; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

当$x \notin (0,2)$时，$f_X(x) = 0$，故$f_{Y|X}(y|x)$不存在.

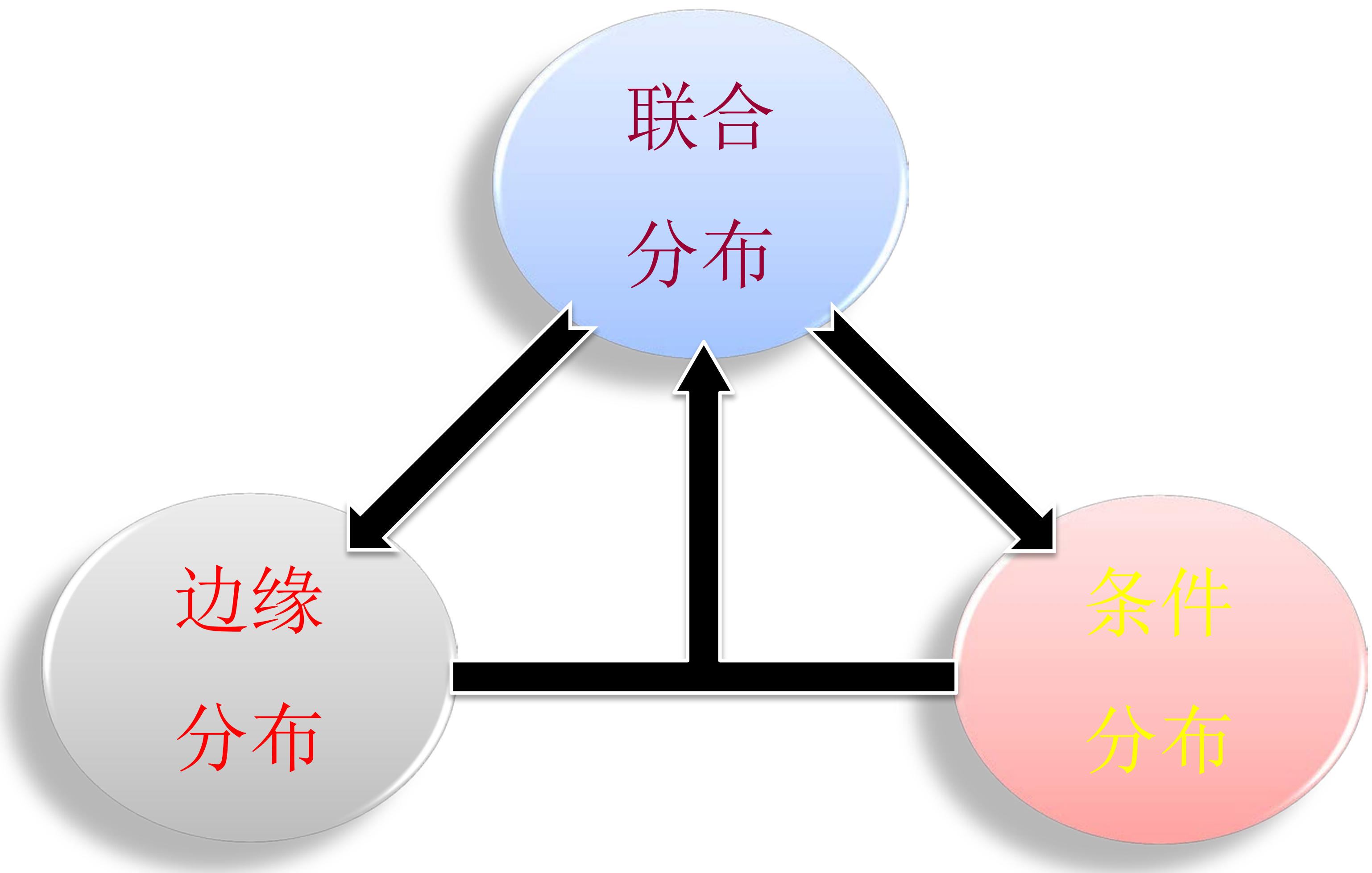
$$P\{0 < Y < 0.5 \mid X = 0.5\} = \int_0^{0.5} f_{Y|X}(y \mid X = 0.5)dy$$

$$= \int_0^{0.5} \frac{1}{0.5} dy = 1.$$

$$P\{0 < Y < 0.5 \mid X = 1.2\} = \int_0^{0.5} f_{Y|X}(y \mid X = 1.2)dy$$

$$= \int_{0.2}^{0.5} \frac{1}{0.8} dy = 0.375.$$

小　结



练　习

1、设(*X*,*Y*)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1, 0<y<x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求*P*(*Y*≤1/8 |*X*<1/4)

$$P\{Y\le 1/8 \mid X<1/4\}=\frac{P\{Y\le 1/8, X<1/4\}}{P\{X<1/4\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1/8}\int_{-\infty}^{1/4} f(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{1/4} f_X(x)dx}$$

2、设随机变量 (X, Y) 具有如下联合分布律:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
0	1/16	1/16	3/16	5/16
1	1/16	3/16	1/16	1/16

试求 $Y = 2$ 时, X 的条件分布律。

解： $Y=2$ 时，X 的条件分布为

$$P\{X=0 \mid Y=2\}=\frac{1/16}{1/4}=\frac{1}{4};$$

$$P\{X=1 \mid Y=2\}=\frac{3/16}{1/4}=\frac{3}{4}.$$

第三章　多维随机变量

第四节 随机变量的函数及其分布

1、离散型随机变量的函数及其分布律

2、连续型随机变量的函数及其概率密度

3、几种特殊函数的分布

4、小结、思考

(1)炮击某一目标$\boldsymbol{O}$,已知弹着点$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$服从二维正态分布,点$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$与目标$\boldsymbol{O}$的距离

$$\boldsymbol{Z}=\sqrt{\boldsymbol{X}^2+\boldsymbol{Y}^2}$$

服从什么分布?

(2)由统计物理学,气体分子运动速率$\boldsymbol{v}$服从马克斯维尔分布($\boldsymbol{Maxwell}$):

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{4\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{\alpha}^3\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}\boldsymbol{e}^{\frac{-\boldsymbol{x}^2}{\alpha^2}}, & \boldsymbol{x}>0;\\ 0, & \boldsymbol{x}\le 0;\end{cases}\qquad \boldsymbol{\alpha}>0$$

那么分子运动动能$\boldsymbol{\eta}=\frac{1}{2}\boldsymbol{m}\boldsymbol{v}^2$服从什么分布?

一、离散型随机变量的函数及其分布律

一维离散型随机变量$\boldsymbol{X}$的分布律为

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\cdots$$

若$Y=g(X)$,则Y的分布律为:

$$P\{Y=y_j\}=P\{g(X)=y_j\}$$
$$=\sum_{x_i\in S_j}P\{X=x_i\}$$
$$=\sum_{x_i\in S_j}p_i,$$

$$j=1,2,\cdots$$

这里，$S_j=\{x_i\,|\,g(x_i)=y_j\}$

二维离散型随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\ \ i,j=1,2,\cdots$$

若$Z=G(X,Y)$，则Z的分布律为：

$$\begin{aligned}P\{Z=z_k\}=P\{G(X,Y)=z_k\}&=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}P\{X=x_i,Y=y_j\}\\&=\sum_{(x_i,y_j)\in T_k}p_{ij},\end{aligned}$$

$$k=1,2,\cdots$$

这里，$T_k=\left\{(x_i,y_j)\,\middle|\,G(x_i,y_j)=z_k\right\}$

例1 设(X,Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

试求（1）$\sin X$；（2）$X+Y$；（3）XY；（4）$\max(X,Y)$的分布律.

解：由(X,Y)的分布律得

p_{ij}	3/10	3/10	3/10	1/10
(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$\sin X$	0		$\sin 1$	
$X+Y$	0	1	1	2
XY	0	0	0	1
$\max(X,Y)$	0	1	1	1

$\sin X$	0	$\sin 1$
p	0.6	0.4

$X+Y$	0	1	2
p	0.3	0.6	0.1

XY	0	1
p	0.9	0.1

$\max(X,Y)$	0	1
p	0.3	0.7

定理: 设随机变量(X,Y)是离散型随机变量,X,Y相互独立其分布律为:

$$P\{X=k\}=p(k),\ k=0,1,2,\cdots$$
$$P\{Y=r\}=q(r),\ r=0,1,2,\cdots$$

则$X+Y$的分布律为:

离散卷积公式

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m}p(k)q(m-k),\quad m=0,1,2,\cdots$$

例2 设X, Y相互独立,且$X\sim B(n_1, p)$, $Y\sim B(n_2, p)$ 则 $X+Y\sim B(n_1+n_2, p)$

证：

$$P\{X=k\}=C_{n_1}^{k}p^{k}(1-p)^{n_1-k}, k=0,1,\cdots n_1;$$

$$P\{Y=r\}=C_{n_2}^{r}p^{r}(1-p)^{n_2-r}, r=0,1,\cdots n_2;$$

$$P\{X+Y=m\}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_{n_1}^{k}p^{k}(1-p)^{n_1-k}C_{n_2}^{m-k}p^{m-k}(1-p)^{n_2-m+k}$$

$$= p^{m}\left(1-p\right)^{n_1+n_2-m}\sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{m-k}$$

利用$\sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^{k} C_{n_2}^{m-k} = C_{n_1+n_2}^{m}$

$$P\left\{X+Y=m\right\} = C_{n_1+n_2}^{m} p^{m}\left(1-p\right)^{n_1+n_2-m}$$

$$m = 0, 1, \cdots, n_1+n_2$$

二项分布具有可加性

注（1）若$X_1, X_2, \ldots, X_n$相互独立,且$X_i \sim B(1, p)$则

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim B(n, p)$$

反之若 $X \sim B(n, p)$，则存在相互独立的$X_i \sim B(1, p)$，使

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

注（2）泊松分布具有可加性

教材例 3.4.3

二、连续型随机变量的函数及其概率密度

设X是连续型随机变量，$Y=g(X)$也是连续型随机变量，则分布函数为

$$F_Y(y)=P\{g(x)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}} f_X(x)dx$$

对其求导，得Y的概率密度函数:

$$f_Y(y)=\begin{cases} F_Y'(y), & f_Y(y)\text{的连续点;} \\ 0, & \text{其他;} \end{cases}$$

同理,二维连续型随机变量$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的函数

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$$

的概率密度$\boldsymbol{f_Z}(\boldsymbol{z})$可通过对$\boldsymbol{F_Z}(\boldsymbol{z})$求导获得。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_Z}(\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\le \boldsymbol{z}\} \\ &= \iint\limits_{\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le \boldsymbol{z}\}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy}\end{aligned}$$

定理：设随机变量$\boldsymbol{X}$具有概率密度$f_X(x), +\infty < x < +\infty$,
又设函数$g(x)$处处可导且恒有

$$g'(x) > 0 (\text{或} g'(x) < 0),$$

则 $Y = g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\big(h(y)\big)\big|h'(y)\big|, & \alpha < y < \beta; \\ 0, & \text{其他}; \end{cases}$$

这里

$$\alpha = \min\big(g(-\infty), g(+\infty)\big),$$
$$\beta = \max\big(g(-\infty), g(+\infty)\big).$$

例3.4.3 **:设$X\sim N(0, 1)$, 求$Y=X^2$ 的概率密度.**

解:

当 $y \le 0$,

$$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\} = 0;$$

当 $y > 0$,

$$F_Y(y) = P\{X^2 \le y\} = P\{-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$$

即 $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0; \\ \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, & y \ge 0. \end{cases}$

因此

$$\boldsymbol{f_Y(y) = F_Y{}'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}}(\sqrt{y})' - e^{-\frac{\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2}}(-\sqrt{y})'\right]}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}}$$

所以

$$\boldsymbol{f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}}$$

例 4 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x,y>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求随机变量$Z=X+2Y$的分布函数和概率密度.

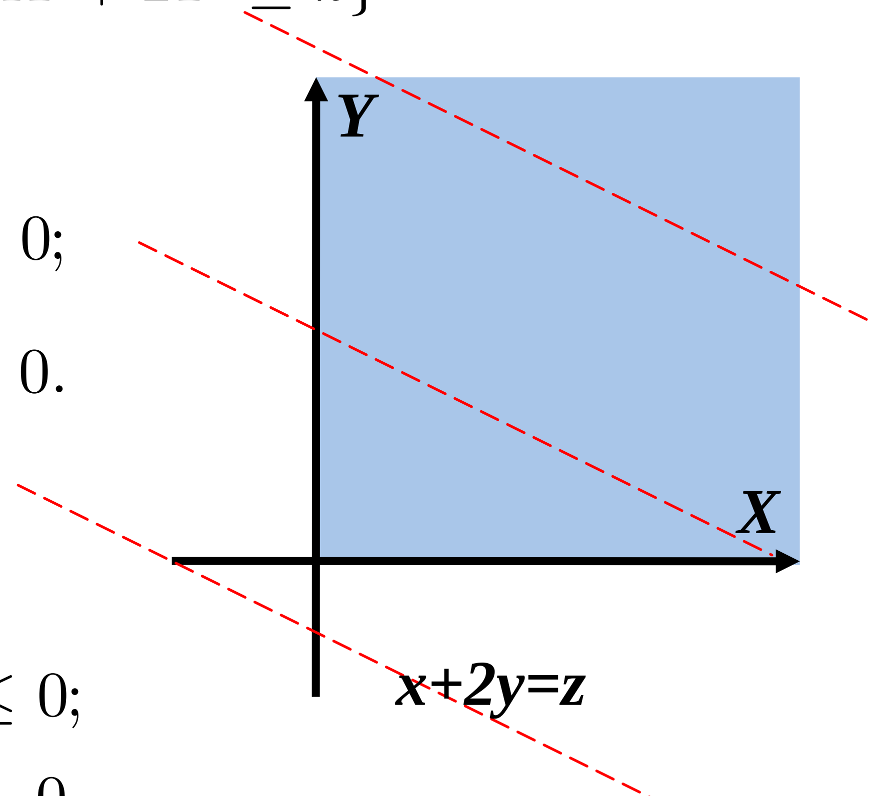
解：因为$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}$

$$=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\begin{cases}0, & z<0;\\ \int_0^z\left[\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy\right]dx, & z\ge 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0;\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z\ge 0.\end{cases}$$

所以$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z\le 0;\\ ze^{-z}, & z>0.\end{cases}$



一般原则：要求一维(二维)连续型随机变量的函数$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})$(或$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$)的概率密度$\boldsymbol{f_Z}(\boldsymbol{z})$，我们一般是

(1)先求出$\boldsymbol{Z}$的分布函数$\boldsymbol{F_Z}(\boldsymbol{z})$;

(2)再对$\boldsymbol{F_Z}(\boldsymbol{z})$求导得到$\boldsymbol{f_Z}(\boldsymbol{z})$.

三、几种特殊函数的分布

（1）极值分布

（2）和的分布

（3）商的分布

可用公式简便求解。

1、$M = max(X, Y)$ 或 $N = min(X, Y)$

$$
\begin{aligned}
F_M(z) &= P\{\max(X,Y) \le z\} \\
&= P\{X \le z, Y \le z\} \\
&= F(z,z)
\end{aligned}
$$

注（1）若 X 与 Y 相互独立有:

$$F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

（2）若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有:

$$F_M(z) = \left[F_X(z)\right]^2$$

$$f_M(z) = 2F_X(z)f_X(z)$$

$$
\begin{aligned}
F_N(z) &= P\{\min(X,Y) \le z\} \\
&= P\{X \le z \text{或} Y \le z\} \\
&= P\{X \le z\} + P\{Y \le z\} - P\{X \le z, Y \le z\} \\
&= F_X(z) + F_Y(z) - F(z,z)
\end{aligned}
$$

注（1）若 X 与 Y 相互独立有:

$$
\begin{aligned}
f_N(z) &= f_X(z) + f_Y(z) - F_X(z)f_Y(z) - f_X(z)F_Y(z) \\
&= f_X(z)\left(1 - F_Y(z)\right) + f_Y(z)\left(1 - F_X(z)\right)
\end{aligned}
$$

（2）若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有:

$$f_N(z) = 2\left(1 - F_X(z)\right) f_X(z) = 2\left(1 - F_Y(z)\right) f_Y(z)$$

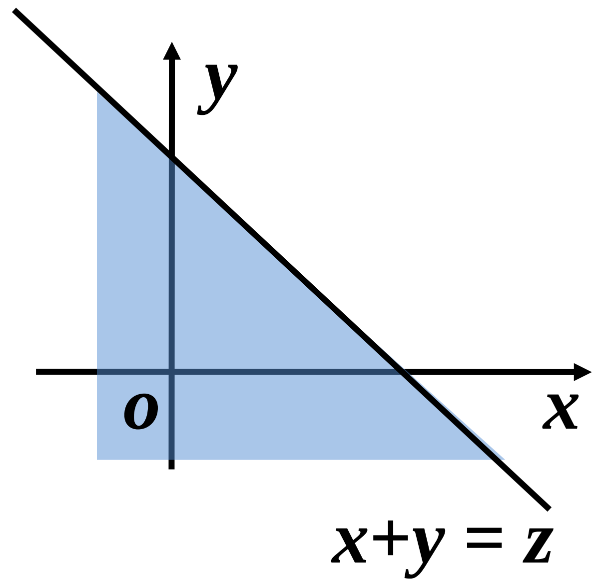
2、$Z = X + Y$ 的分布

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，则

$$F_Z(z) = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$



令$x = u - y$, 得

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)\,du\right]dy$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)\,dy\right]du$$

由分布函数(连续型)定义

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_z(u)\,du$$

得到公式:

$$\boxed{f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy}$$

同理，令$y=u-x$,得到公式:

$$\boxed{f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx}$$

注： 若随机变量X, Y**相互独立**，则有公式：

$$f_z\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(z-y\right)f_Y\left(y\right)dy$$

或者

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X\left(x\right)f_Y\left(z-x\right)dx$$

例5：设随机变量$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$相互独立，且均服从区间$(0,1)$上的均匀分布，求$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$的概率密度$\boldsymbol{f_Z(z)}$.

分析:

(1)$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$相互独立，所以有

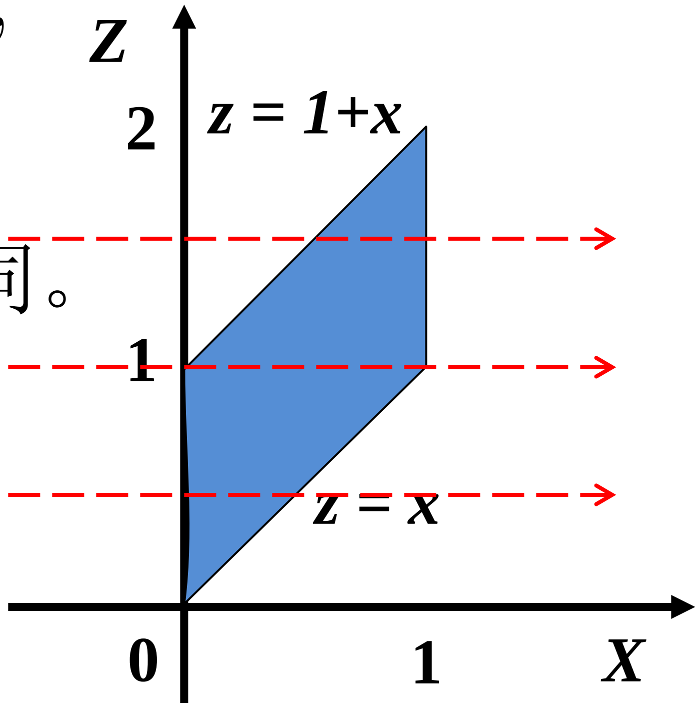
$$\boldsymbol{f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx;}$$

(2)使$f_X(x), f_Y(z-x)$为非零的区域为

$$0 < x < 1, 0 < z - x < 1;$$

(3)$f_Z(z)$的非零区域为$0 < z < 2$;

(4)在不同的区域积分上下限不同。



解：因为随机变量X,Y相互独立，所以

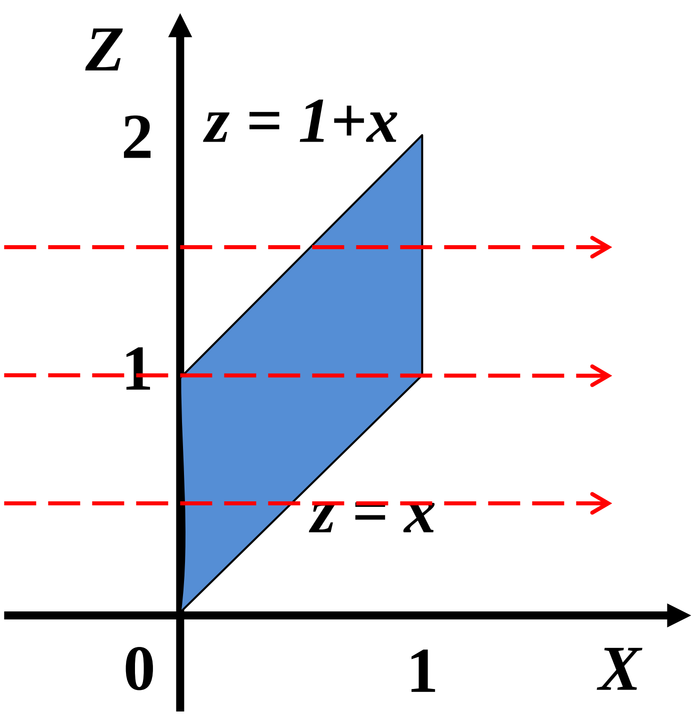
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

在XOZ平面上作出区域G:

$$G=\left\{(x,z)\middle|\begin{array}{l}0\le x\le 1,\\ 0\le z-x\le 1\end{array}\right\}$$

所以

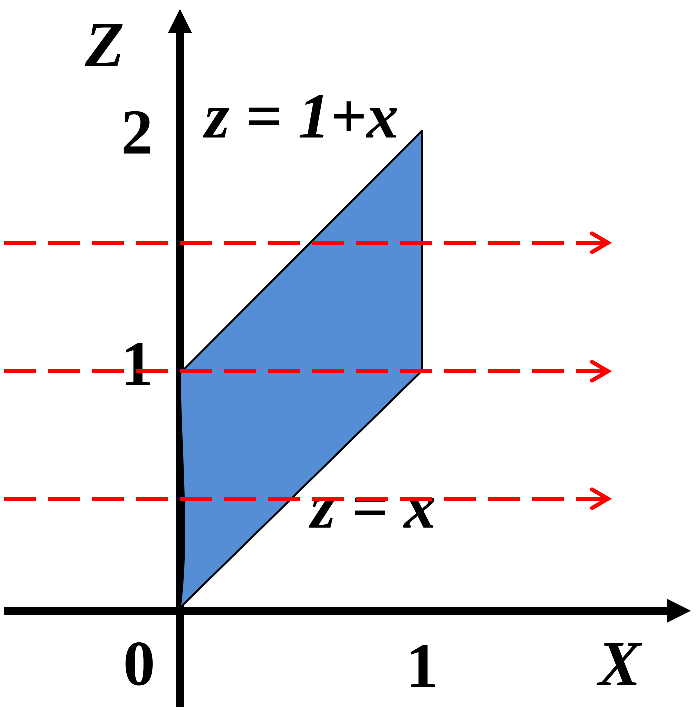
$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}0, & (x,z)\notin G;\\ 1, & (x,z)\in G.\end{cases}$$



当$z \le 0$或$z > 2$时, $f_Z(z)=0$;

当$0 < z \le 1$时, $f_Z(z) = \int_0^z 1\,dx = z.$

当$1 < z \le 2$时, $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1\,dx = 2 - z;$



因此

$Z = X + Y$的概率密度为:

$$f_Z(z) = \begin{cases} z, & 0 < z \le 1; \\ 2 - z, & 1 < z \le 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

小结

（1）在 XOZ平面上作出 $f(x, z-x)$ 的非零区域 G;

（画图）

（2）从区域 G 中确定 $f_Z(z)$非零区域;

（讨论）

（3）在 $f_Z(z)$非零区域中，逐段确定$f_Z(z)$的表达式;

（定限）

（4）写出 $f_Z(z)$的完整表达式。

（计算）

例6：已知二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

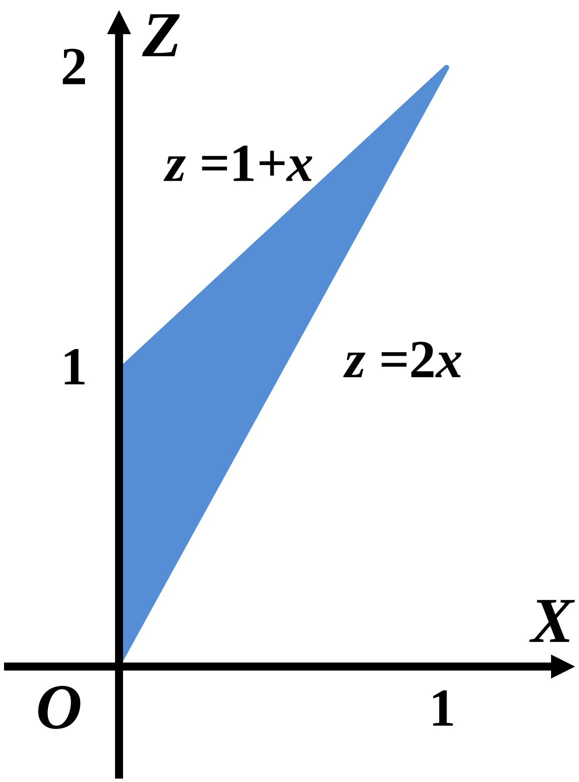
$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y), & 0\le x\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$Z=X+Y$的概率密度。

解：在XOZ平面上作出区域

$$G=\left\{(x,z)\middle|0\le x\le z-x\le 1\right\}$$

$$=\left\{(x,z)\middle|\begin{matrix}0\le x\le 1,\\ 2x\le z\le 1+x\end{matrix}\right\}$$



所以

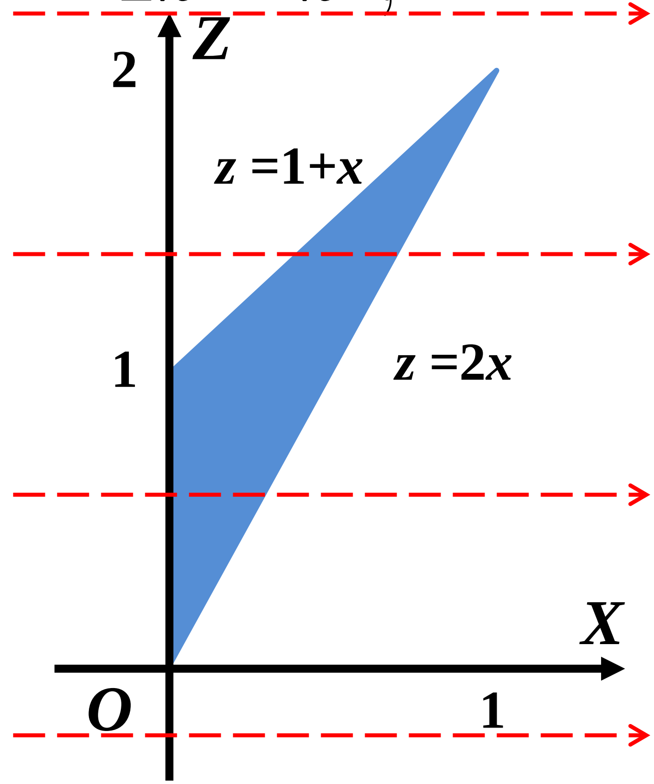
$$f(x,y)=\begin{cases}2z, & (x,z)\in G;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$,所以

当$z\le 0$或$z>2$时, $f_Z(z)=0$;

当$0<z\le 1$时, $f_Z(z)=\int_0^{z/2} 2z\,dx = z^2$

当$1<z\le 2$时, $f_Z(z)=\int_{z-1}^{z/2} 2z\,dx = 2z-z^2$;



因此$Z=X+Y$的概率密度为:

$$f_Z(z)=\begin{cases} z^2, & 0<z\le 1; \\ 2z-z^2, & 1<z\le 2; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

注（1）在求$Z=X+Y$的概率密度 $f_Z(z)$时，我们也可以通过YOZ平面来求解.

这时所引用的公式为:

$$f_z\left(z\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(z-y,y\right)dy$$

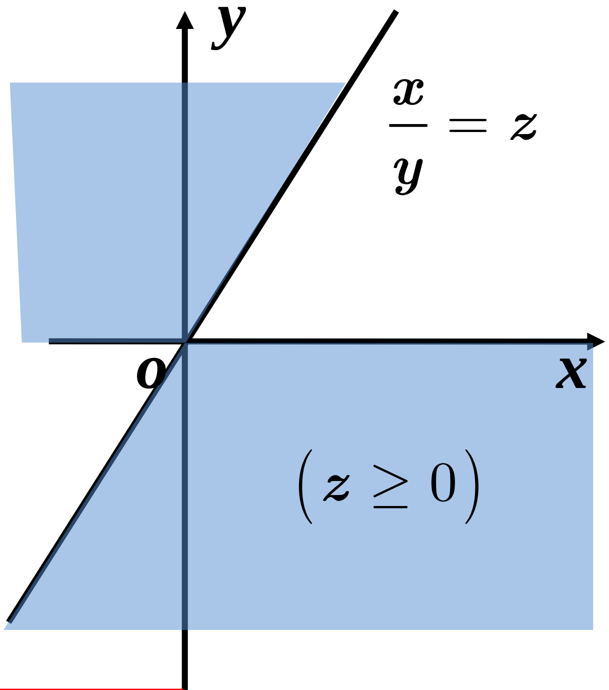
（2）正态分布具有可加性。

3、Z = X /Y 的分布

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$,则

$$F_Z(z) = P\{X / Y \le z\} = \iint\limits_{x/y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy + \int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)dx\right]dy$$



令$x = yu$,则有公式,

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy,y)\,dy}$$

例8：已知随机变量X,Y相互独立同分布，

$$f_X(x)=f_Y(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求$X\,/\,Y$的分布.

解：令 $G=\{(y,z)\mid yz>0, y>0\}=\{(y,z)\mid y>0, z>0\}$

$$f(yz,y)=f_X(yz)f_Y(y)=\begin{cases} e^{-yz-y}, & (y,z)\in G; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,z)dy=\begin{cases} \int_0^{+\infty} ye^{-yz-y}dy, & z>0; \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{(z+1)^2}, & z>0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$