第七章　常微分方程试验

- 常微分方程数值解方法
- 向量场雨箭图绘制方法

一、数值方法求常微分方程

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

命令：

[T,Y] = ode23('F',Tspan,y0)

这里，Tspan = [t_0, t_N]是常微分方程求解区域，y0是初始值，'F' 是包括函数文件名字的符串。

[T,Y]是求解区域内离散数据以及对应的数值解。

步骤：

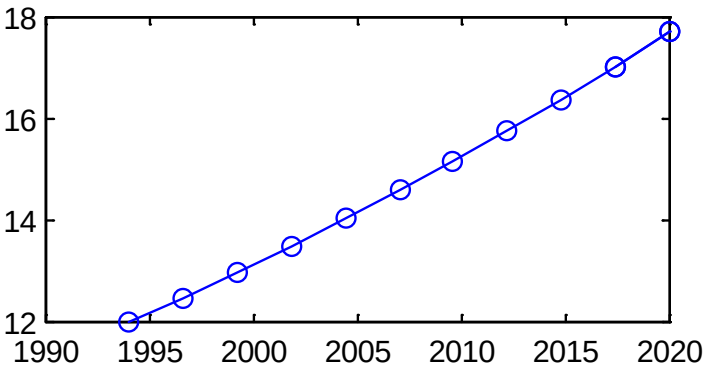
(1)用函数文件定义一阶微分方程(或方程组)右端函数；
(2)用MATLAB命令ode23()求数值解或绘积分曲线。

例7. 1 马尔萨斯模型 以1994 年我国人口为12亿为初值，求解常微分方程。

分析：$N(t)$表示人口数量, 取人口变化率r=0.015, 微分方程

$$\frac{dN}{dt} = 0.015N$$

$$N(1994) = 12$$



编辑窗口 ➔

```
function z=fun1(t,N)
z=0.015*N;
```

命令窗口 ➔

```
ode23('fun1',[1994,2020],12)
[T,N]=ode23('fun1',[1994,2020],12)
```

例7. 2 捕食者与被捕食者问题

海岛上有狐狸和野兔, 当野兔数量增多时，狐狸捕食野兔导致狐群数量增长;大量兔子被捕食使狐群进入饥饿状态其数量下降;狐群数量下降导致兔子被捕食机会减少, 兔群数量回升。微分方程模型如下

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 0.015xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + 0.01xy \end{cases}, \quad \begin{matrix} x(0) = 100 \\ y(0) = 20 \end{matrix}$$

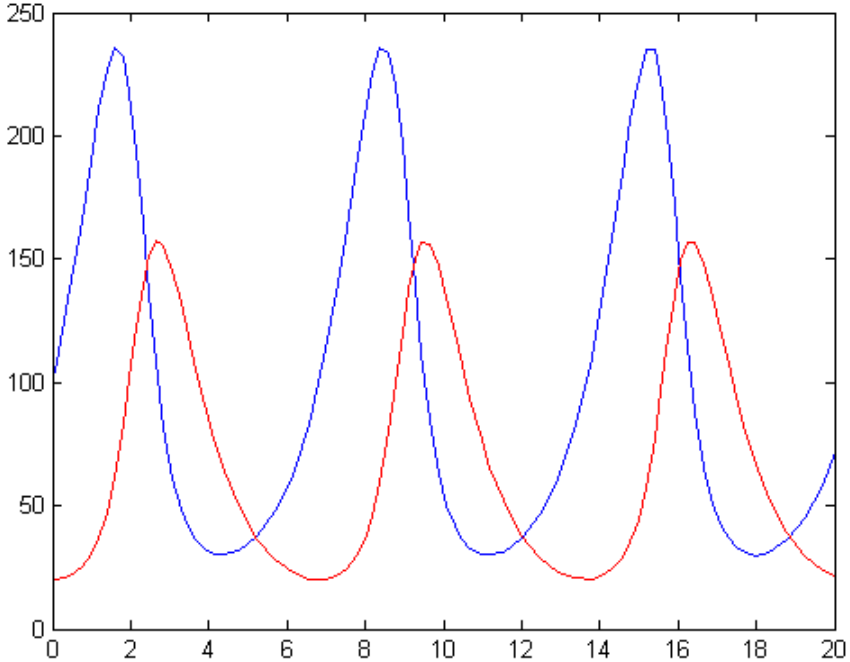
计算 $x(t)$，$y(t)$ 当$t \in [0，20]$时的数据。绘图并分析捕食者和被捕食者的数量变化规律。

% 创建MATLAB的函数文件

```
function z=fox(t,y)
z(1,:)=y(1)-0.015*y(1)*y(2);
z(2,:)=-y(2)+0.01*y(1)*y(2);
```

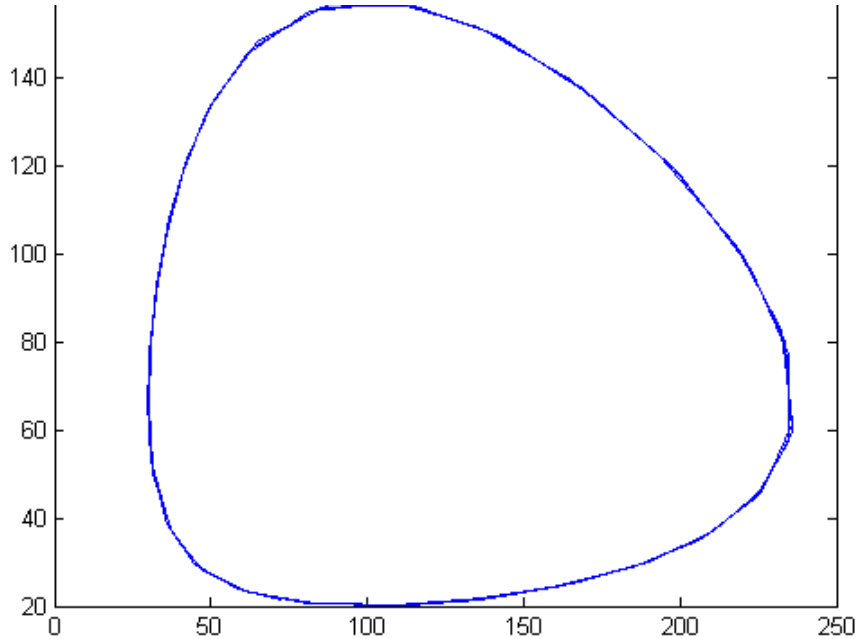
% 求微分方程数值解并绘解函数图形

```
Y0=[100,20];
[t,Y]=ode23('fox',[0,20],Y0);
x=Y(:,1);y=Y(:,2);
figure(1)
plot(t,x,'b',t,y,'r')
figure(2)
plot(x,y)
```



------兔子数量

------狐狸数量



兔、狐数量

变化相位图

例7. 3 蝴蝶效应

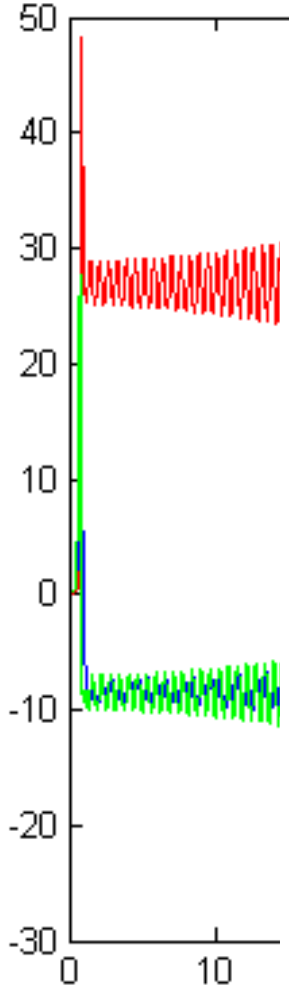
数学家洛伦兹在一次讲演中将大气环流数据对初值的敏感性形象地解释为“一只蝴蝶在巴西扇动翅膀，会引起德克萨斯州一场龙卷风”。洛伦兹微分方程模型如下

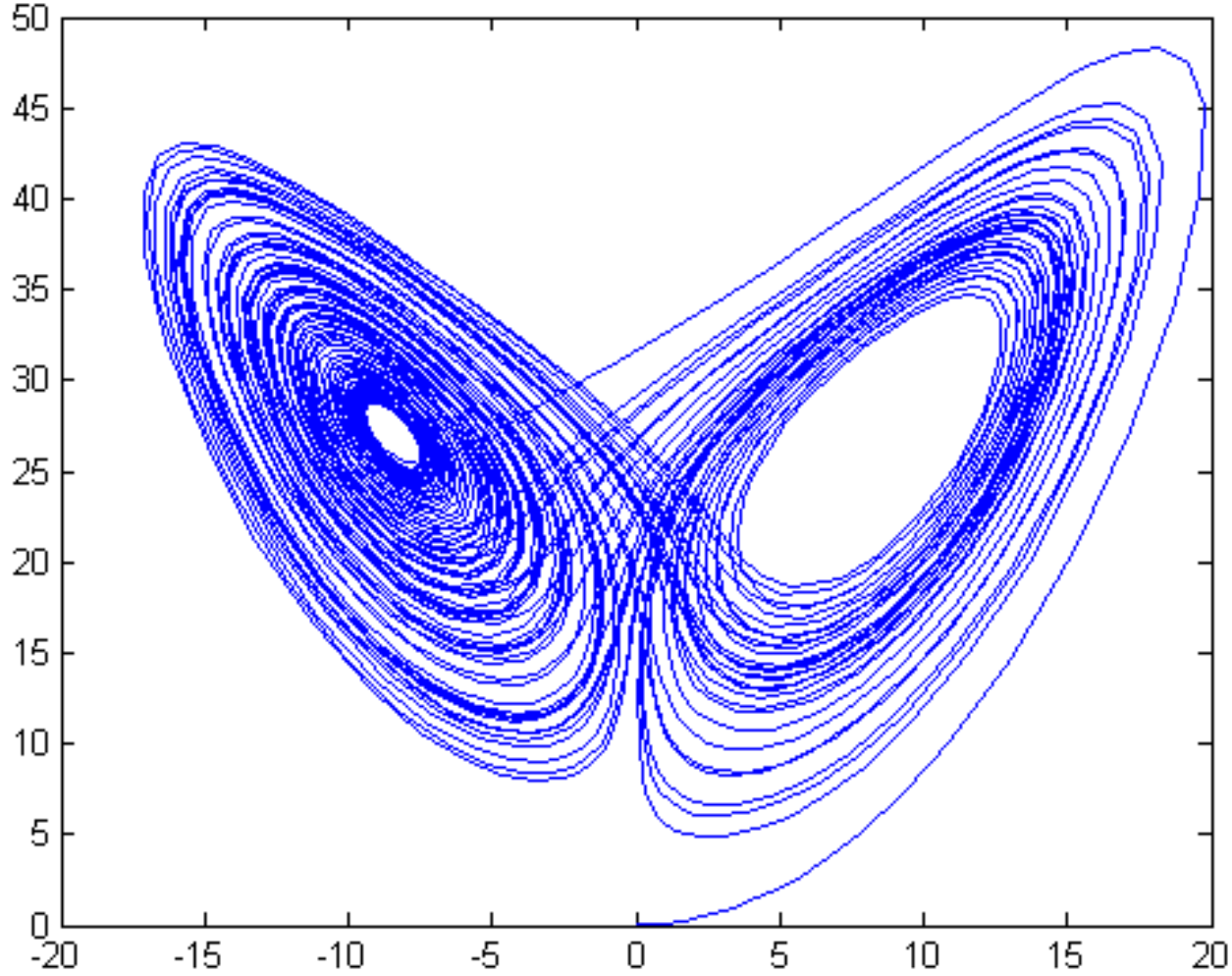
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\beta x + yz \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sigma(y - z) \\ \dfrac{dz}{dt} = -xy + \rho y - z \end{cases}, \quad t \in [0, 80]$$

若β=8/3，σ=10，ρ=28，初值$x(0)$=0，$y(0)$=0，$z(0)$=0.01时，计算当$t\in[0，80]$时洛伦兹方程的数值解，并绘出相空间在y-x平面的投影曲线。

```
[T,Y]=ode23('myfun',[0,80],[0, 0, 0.01]);
x=Y(:,1);
y=Y(:,2);
z=Y(:,3);
figure(1), plot(t,x,'r',t,y,'b',t,z,'g');
figure(2), plot(y,x)


function u=myfun(t,y)
u(1,:)=-8/3*y(1)+y(2)*y(3);
u(2,:)=-10*y(2)+10*y(3);
u(3,:)=-y(1)*y(2)+28*y(2)-y(3);
```


50
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
0
10


50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

例7.4 抛射曲线实验 假设阻力与速度成正比，在微分方程中增加阻力项

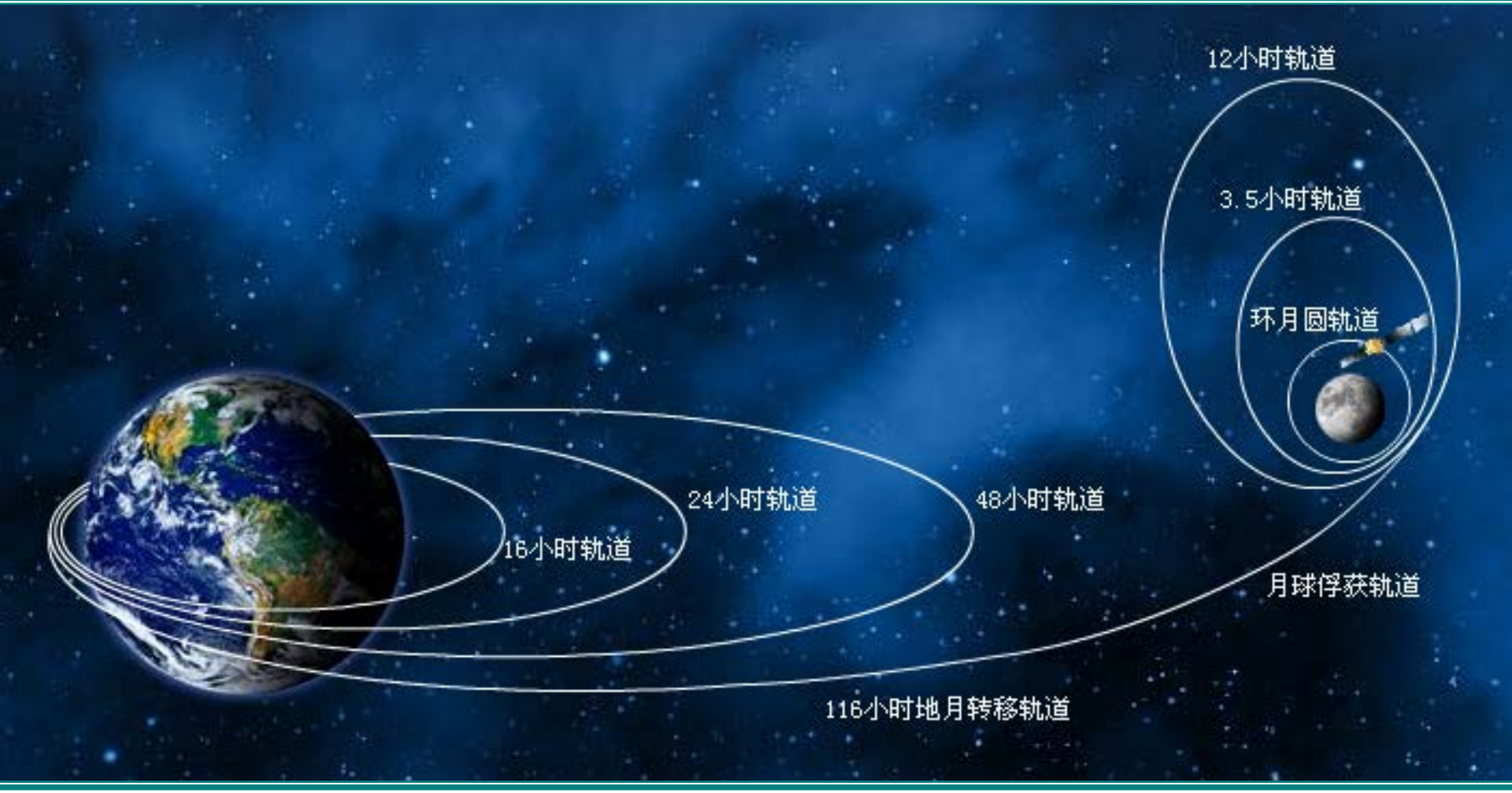
$$\begin{cases} x''(t) = -kx'(t) & x(0) = 0,\ \ x'(0) = v_0 \cos\alpha \\ y''(t) = -g - ky'(t) & y(0) = 0,\ \ y'(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

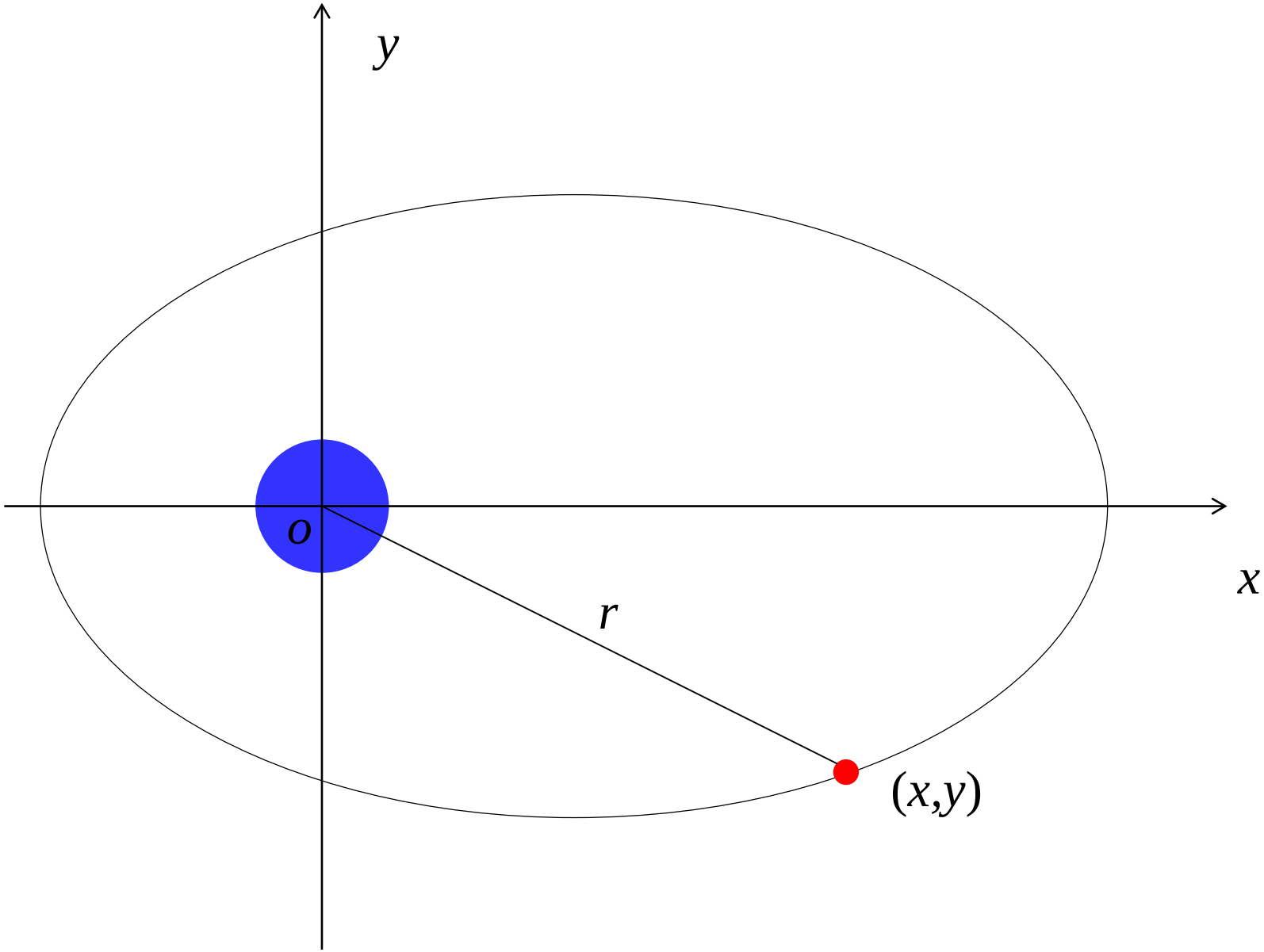
符号计算方法

```
syms t v g alfa k
x=dsolve('D2x=-k*Dx','x(0)=0','Dx(0)=v*cos(alfa)');
y=dsolve('D2y=-g-k*Dy','y(0)=0','Dy(0)=v*sin(alfa)');
pretty([x;y])
```

```
+-                                                    -+
|        v cos(alfa)     v cos(alfa)                   |
|        -----------  -  -----------                   |
|            k              k exp(k t)                 |
|                                                      |
| g + k v sin(alfa) - g k t     g + k v sin(alfa)      |
|  -------------------------  -  -----------------     |
|              2                          2            |
|          k                      k  exp(k t)          |
+-                                                    -+
```

嫦娥一号轨道　卫星进入初始轨道时，最大速度大约为10.3(km/s)，而奔月速度需要10.9(km/s)




y
x
o
r
(x,y)

假设五个轨道上最大速度从10.3(公里/秒)逐步增加到10.9(公里/秒)

10.3，10.45，10.6，10.75，10.9

根据牛顿万有引力定律，地球对卫星的引力大小为

$$F = G\frac{Mm}{x^2+y^2}[-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}]$$

卫星运动方程

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \ddot{y} = -\frac{GMy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

地球引力参数：GM=3.986005×10^5（km^3/s^2）

转换为一阶微分方程组

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= u \\
\dot{u} &= -GMx \,/\, (x^2 + y^2)^{3/2} \\
\dot{v} &= -GMy \,/\, (x^2 + y^2)^{3/2} \\
\dot{y} &= v
\end{aligned}
$$

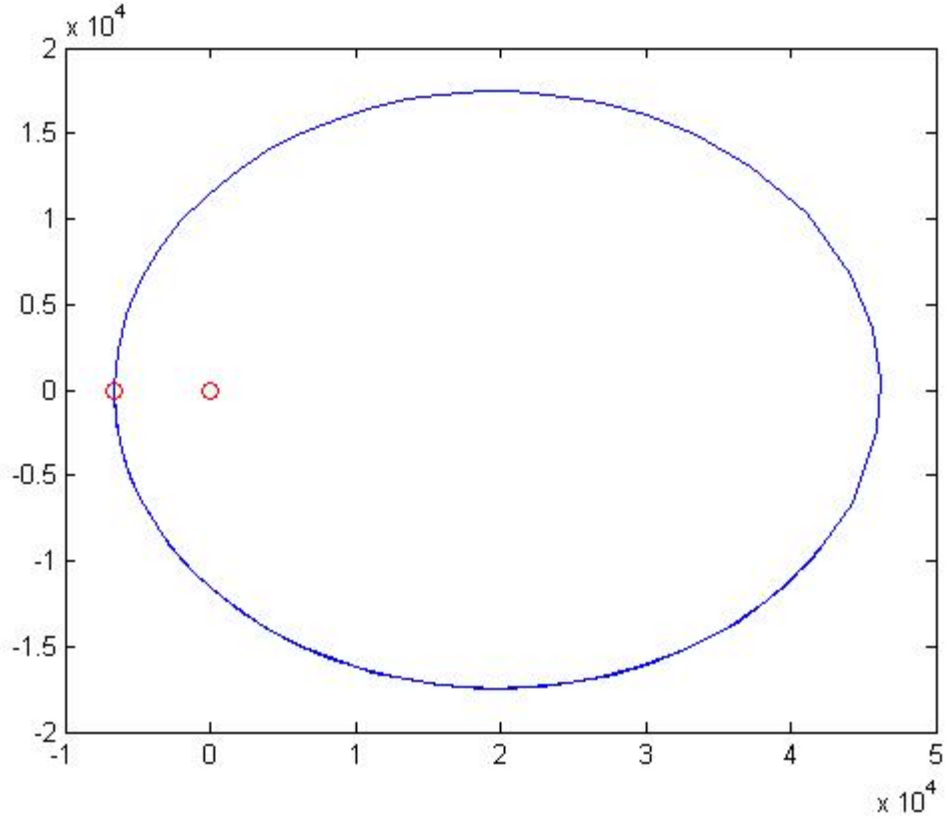
初始条件

$$x(0) = -(R + h) \qquad u(0) = v_0 \cos(-\pi \,/\, 2)$$

$$y(0) = 0 \qquad v(0) = v_0 \sin(-\pi \,/\, 2)$$

```
function [Vmax,H]=orbitlab(v,h,T)
if nargin==0;v=10.3; h=200;T=16;end;
R=6378;
T0=T*60*60;
Y0=[-(R+h),v*cos(-pi/2),0,v*sin(-pi/2)];
[T,Y]=ode23('orbit',[0,T0],Y0);
x=Y(:,1);
y=Y(:,3);
plot(x,y,[0,-(R+h)],[0,0],'ro')
vx=Y(:,2);
vy=Y(:,4);
V=sqrt(vx.^2+vy.^2);
Vmax=max(V);
H=max(x);
```

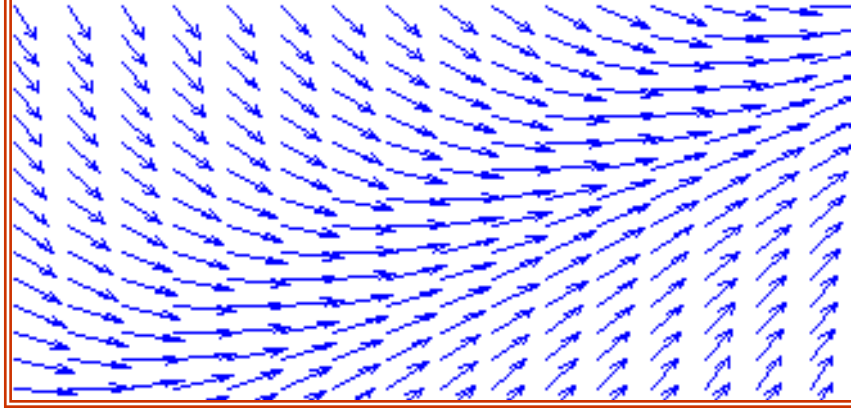
```
function z=orbit(t,y)
GM=3.986005e05;
z(1,:)=y(2);
z(2,:)=-GM*y(1)./((y(1).^2+y(3).^2).^(3/2));
z(3,:)=y(4);
z(4,:)=-GM*y(3)./((y(1).^2+y(3).^2).^(3/2));
```



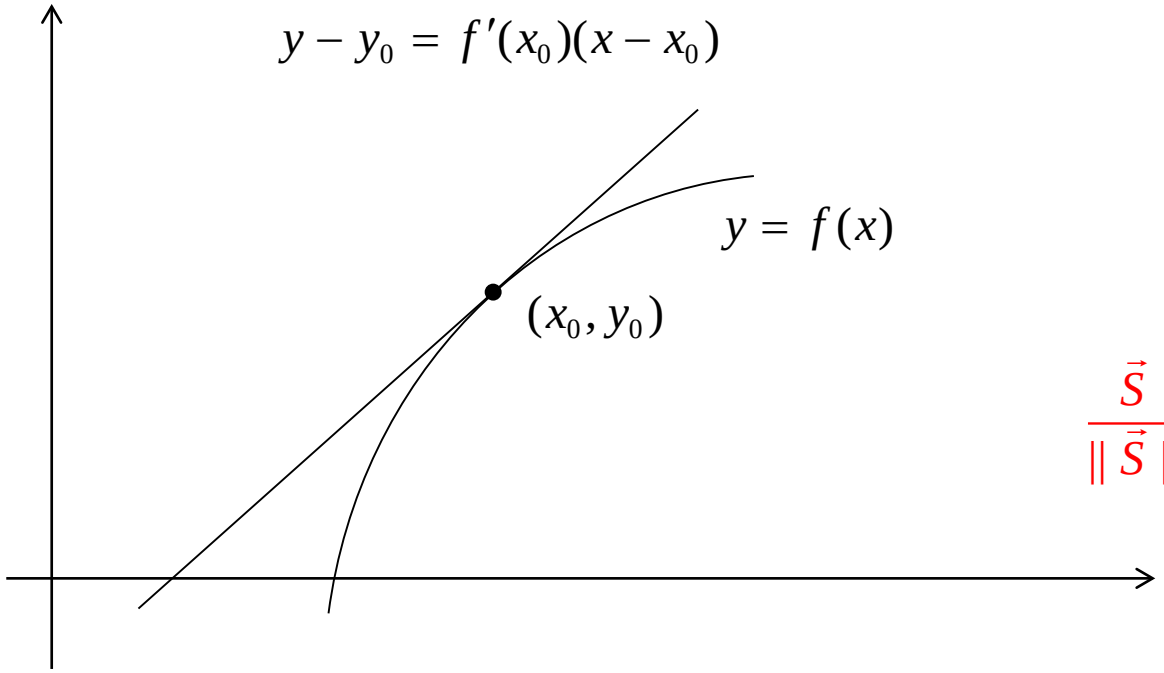
二、向量场雨箭图绘制方法

命令

quiver(X,Y,U,V)



以雨箭图绘出点(x，y)处分量为(u，v)的速度向量。要求矩阵X，Y，U，V必须是同型矩阵。



$$\vec{S} = (1, f'(x_0))$$

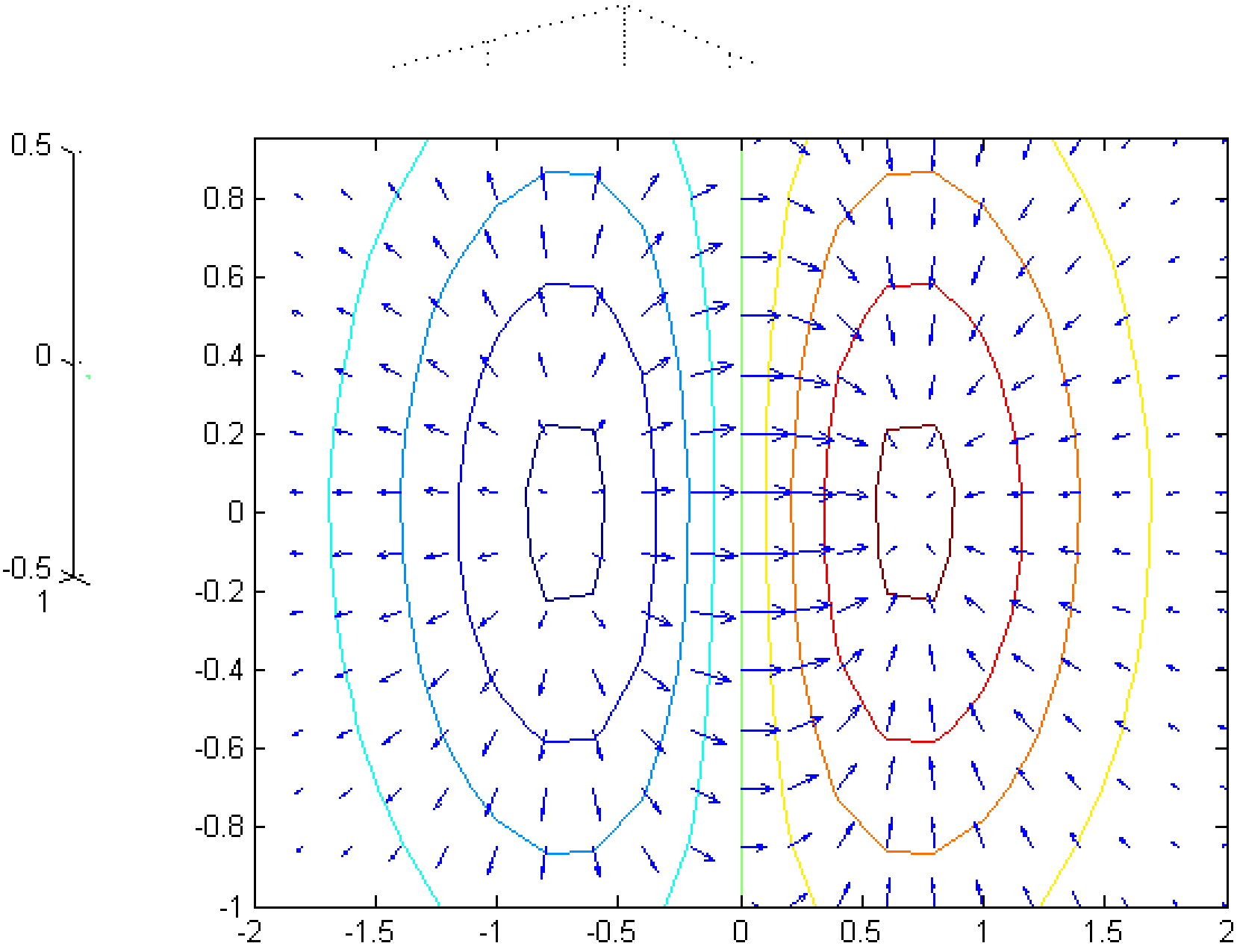
$$\frac{\vec{S}}{\|\vec{S}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}}, \frac{f'(x_0)}{\sqrt{1 + f'(x_0)^2}} \right)$$

例1：利用方法mesh( )绘二元函数

$$z = x \cdot \exp(-x^2 - y^2)$$

曲面；利用计算数值梯度方法**gradient( )**求出二元函数在各网格点处梯度向量；在等高线图基础上绘出梯度场雨箭图。

```
[x,y] = meshgrid(-2:.2:2,-1:.15:1);
z = x .* exp(-x.^2 - y.^2);
figure(1),mesh(x,y,z);
[px,py] = gradient(z,0.2,0.15);        % 计算数值梯度
figure(2),contour(x,y,z),
hold on                                % 绘等高线
quiver(x,y,px,py);                     % 绘雨箭图
hold off
```

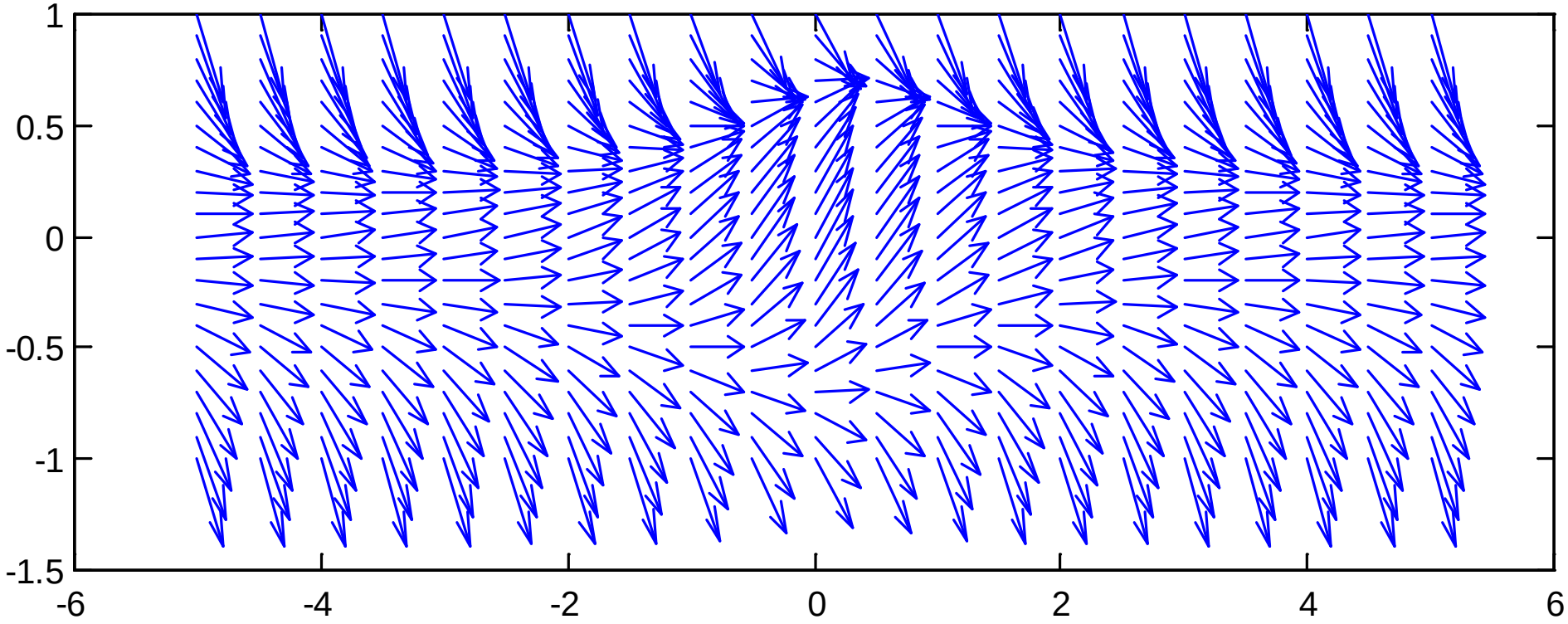

0.5
0
-0.5
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

例2：蛇形曲线的微分方程为：

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2,$$

式子右端的函数在平面区域内任意一点(x,y)处的值确定了解曲线的切线斜率。利用**quiver(x,y,px,py)**绘平面向量场。

```
[x,y]=meshgrid(-2*pi:.2:2*pi, -1.5:0.2:1);
k=1./(1+x.^2)-2*y.^2;
d=sqrt(1+k.^2);
px=1./d;
py=k./d;
quiver(x,y,px,py)
```


1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-6
-4
-2
0
2
4
6

三、向量场流线绘制

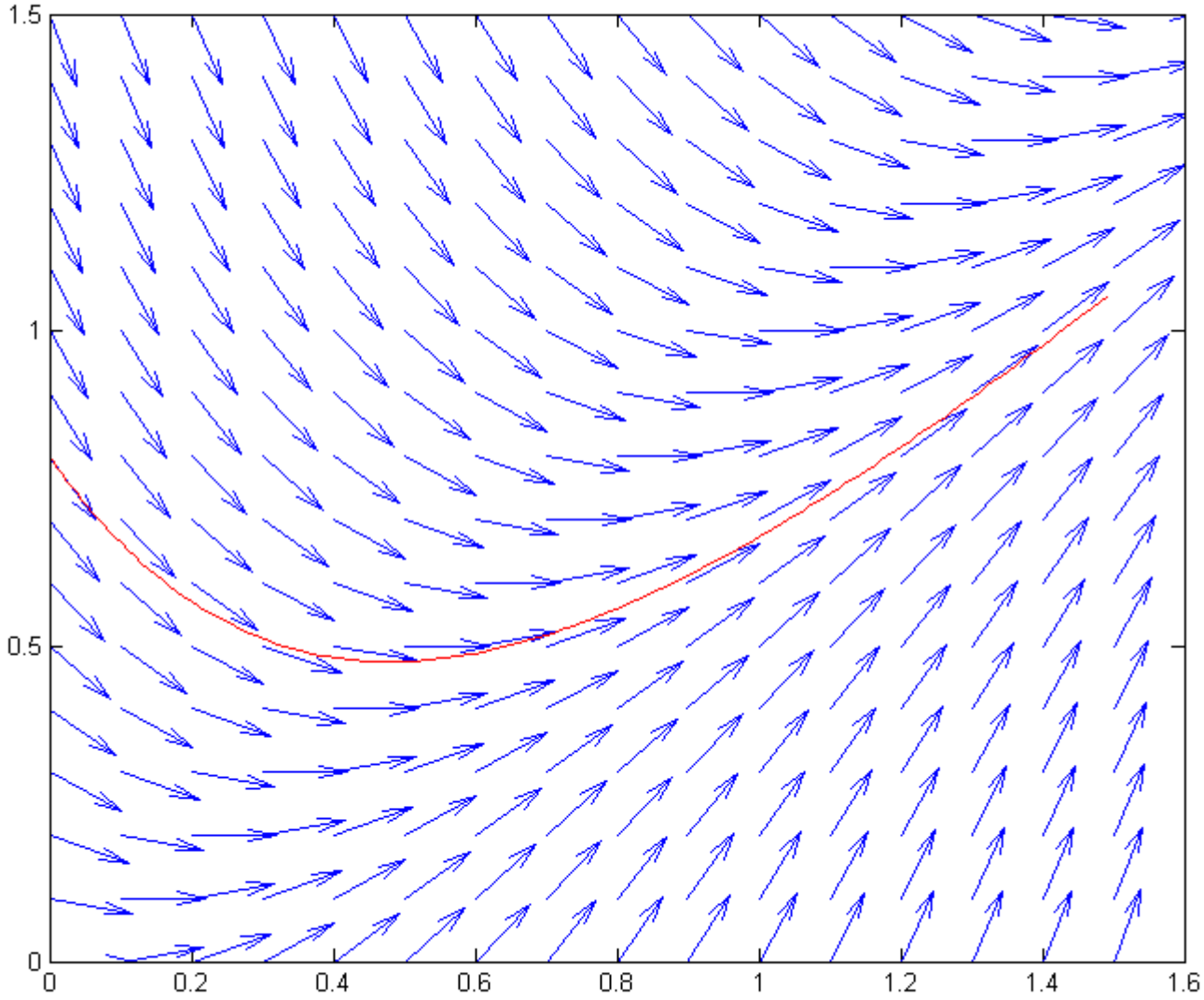
命令：

streamline(X,Y,U,V,Startx,Starty)

X，Y是网格点坐标矩阵，U，V是对应于网格点的向量，Startx,Starty是流线开始点的坐标数据。

```
[x,y]=meshgrid(0:.1:1.5);
f=2*(x-y);d=sqrt(1+f.^2);
px=1./d;py=f./d;
quiver(x,y,px,py),hold on
streamline(x,y,px,py,0,0.8);
```

$$\frac{dy}{dx} = y' = 2(x-y)$$


1.5
1
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6

例3：库仑定律

法国物理学家库仑于1785年发现：真空中两个静止点电荷间相互作用力与距离平方成反比，与电量乘积成正比，作用力方向在它们连线上，同号电荷相斥异号电荷相吸。

作用力 $F = k\dfrac{q_0 q}{r^2}\vec{r}$　　电场强度 $E = F / q_0$

设单位正电荷位于坐标系原点处，试验点电荷坐标(x, y, z)，

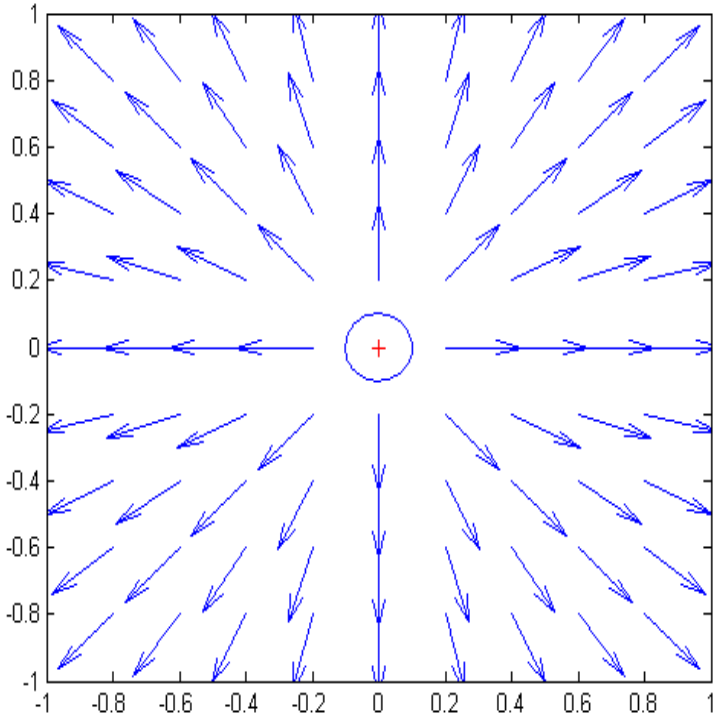
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad F = \frac{k}{r^2}\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right]$$

取 $z=0$，将其简化为平面向量场，分量形式

$$E_x = k\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \qquad E_y = k\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

羽箭绘出点(x，y)处分量为(u，v)的向量。

```
[x,y]=meshgrid(-1:0.2:1);
D=sqrt(x.^2+y.^2).^3+eps;
Ex=x./D;Ey=y./D;                    % 电场强度
E=sqrt(Ex.^2+Ey.^2)+eps;
Ex=Ex./E;Ey=Ey./E;                  % 单位化
quiver(x,y,Ex,Ey)
axis([-1,1,-1,1])
hold on
% 绘制正电荷
t=linspace(0,2*pi,50);
xt=.1*cos(t);yt=.1*sin(t);
plot(0,0,'r+',xt,yt,'b')
```



练习一：两个单位正电荷电场

$$F=\frac{k}{r_1^2}[\frac{x}{r_1},\frac{y}{r_1},\frac{z}{r_1}]+\frac{k}{r_2^2}[\frac{x}{r_2},\frac{y}{r_2},\frac{z}{r_2}]$$

$$r_k=\sqrt{(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2}\qquad(k=1,2)$$

平面向量场模拟, 取 $z=0$

$$E_x=k\frac{x-1}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}}+k\frac{x+1}{[(x+1)^2+y^2]^{3/2}}$$

$$E_y=\frac{ky}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}}+\frac{ky}{[(x+1)^2+y^2]^{3/2}}$$

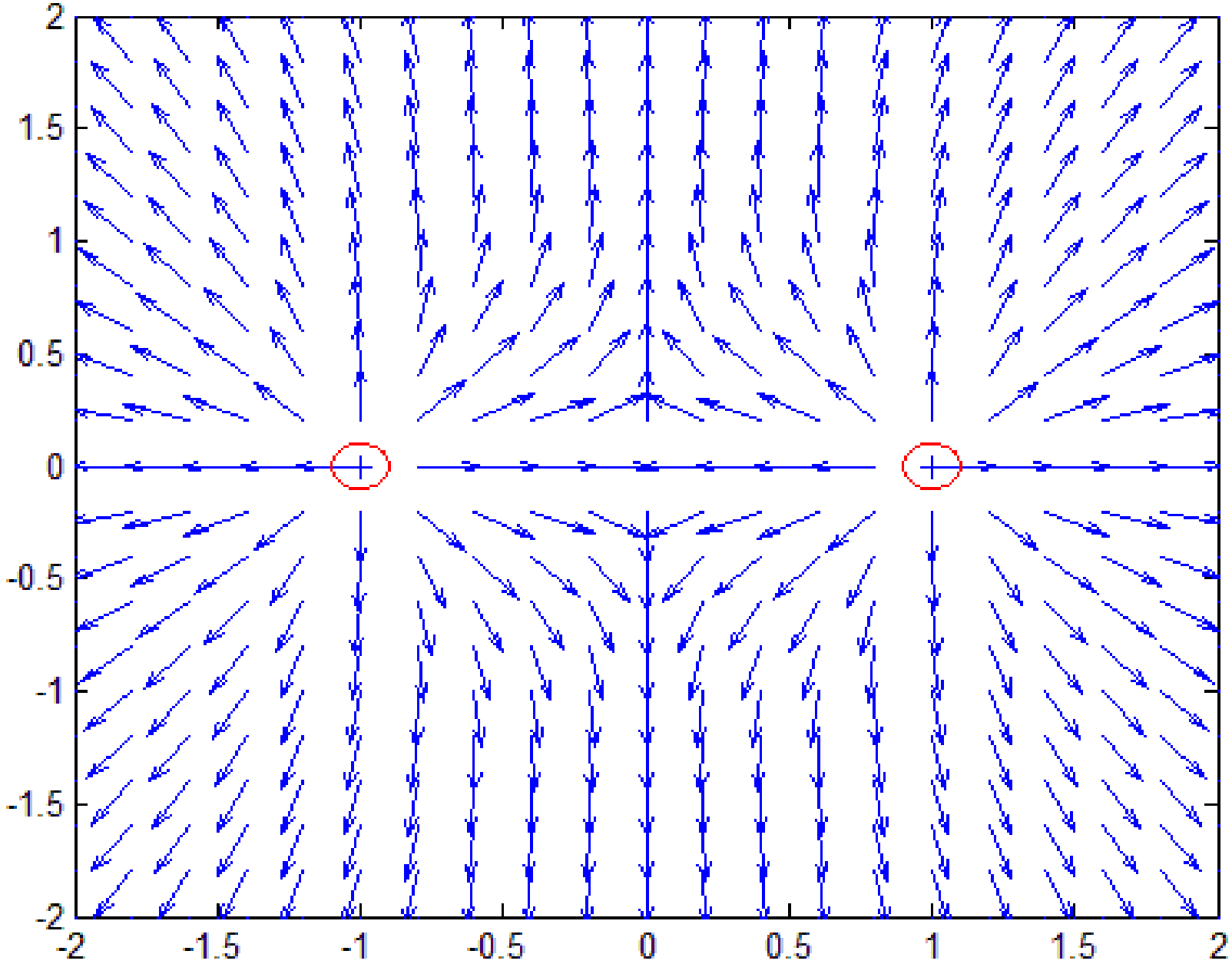
恰好为函数 $U(x,y)=k[\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}]$

的负梯度函数. 称 U 为电势。

羽箭图模拟程序

```
function eline1
[x,y]=meshgrid(-2:.2:2);
D1=sqrt((x+1).^2+y.^2).^3+eps;
D2=sqrt((x-1).^2+y.^2).^3+eps;
Ex=(x+1)./D1+(x-1)./D2;
Ey=y./D1+y./D2;
E=sqrt(Ex.^2+Ey.^2)+eps;
Ex=Ex./E;Ey=Ey./E;
quiver(x,y,Ex,Ey),hold on;

t=linspace(0,2*pi,50);
xt=.1*cos(t);yt=.1*sin(t);
plot([xt'+1,xt'-1],[yt',yt'],'r',[-1,1],[0,0],'b+')
axis([-2,2,-2,2])
```


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2