

# 复习课

## 第一章

范数:

向量  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

定义(1)正定性(2)齐次性(3)三角不等式

1 范数:  $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

2 范数:  $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

$\infty$  范数:  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$$\text{矩阵 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$m_1 \text{ 范数: } \|A\|_{m1} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$m_2 \text{ 范数: } \|A\|_{m2} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

$$m_{\infty} \text{ 范数: } \|A\|_{m_{\infty}} = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$$

$$1 \text{ 范数(列和范数): } \|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

2 范数(谱范数):  $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$

$\infty$  范数(行和范数):  $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$

特征值(特征根)估计

$A \in C^{n \times n}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  为特征值,  $B = \frac{A + A^H}{2}$ ,  $C = \frac{A - A^H}{2}$

Schur 定理(p22 定理 1):

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \|A\|_{m2}^2$$

Hirsch 定理(P23 定理 2):

$$|\lambda_i| \leq n \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$$

$$|\operatorname{Re}(\lambda_i)| \leq n \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |b_{ij}|$$

$$|\operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq n \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |c_{ij}|$$

定理 3, p24:

$$|\operatorname{Im}(\lambda_i)| \leq \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \max_{1 \leq i, j \leq n} |c_{ij}|$$

盖尔圆盘第一定理(p29,定理 6):

$$|\lambda_i| \in \cup_{i=1}^n S_i,$$

行盖尔圆盘定义(p29,定义 1):

$$S_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq R_i\}$$

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$$

盖尔圆盘第二定理(p31,定理 7)

矩阵分析

矩阵序列收敛(p37,定义 1):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$$

收敛矩阵(p37,定义 2,定理 3):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$

黎曼级数定义(p40,定理 5):

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^k$$

矩阵函数(p42,p43,例 1,A 相似于对角矩阵)

## 第二章

绝对（相对）误差（限），

误差来源的分类

数值计算中应当注意的一些基本原则

求  $f(x)=0$ ，二分法（p64）、Newton 法（p68）

三对角矩阵(线性方程组): 追赶法(p83 式子 2.3.10):

$$\gamma_i = a_i, \quad i = 2, \dots, n$$

$$\delta_1 = b_1$$

$$\delta_i = b_i - a_i \beta_{i-1}, \quad i = 2, \dots, n$$

$$\beta_i = \frac{c_i}{\delta_i}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

### 第三章

线性规划的数学模型，标准型：

$$\min c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

.....

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$$

$$\min C^T X$$

或 s.t.

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

二维图解法、单纯形法

基，基（本）解，可行解，基（本）可行解（顶点、极点）

一维搜索：

（1）黄金分割法：

$$t_1 = a + \alpha(b - a)$$

$$t_2 = a + \beta(b - a)$$

$$\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618$$

(2) 抛物线插值法

无约束优化方法:

(1) 最速下降法

$$X^{k+1} = X^k - t_k \nabla f(X^k)$$

(2) Newton 法

$$X^{k+1} = X^k - t_k (H^k)^{-1} \nabla f(X^k)$$

## 第四章

6-7 种常见模型 (p182-183):

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

$$C(n, r) = C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

$$K(n, r) = \frac{P(n, r)}{r}$$

$$F(n, r) = C(n+r-1, r)$$

抽屉原理

容斥原理 (多退少补):

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

对偶原理:

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \overline{A_n}$$

错排:

$$\begin{aligned} D_n &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \end{aligned}$$

棋盘多项式:

$$R(C) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(C) x^k$$

有禁位的排列数为

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i r_i(C) (n-i)! =$$

$$n! - r_1(C)(n-1)! + r_2(C)(n-2)! - \cdots + (-1)^n r_n(C)$$

(p201, 定理 4)

## 第五章

图的数学表示:  $G = (V, E)$

图的有关概念:

点 (端点、顶点, 起点、终点), 边, 环、相邻, 关联, 度, 阶, (生成) 子图, 偶图, 完全图

图  $G$  的矩阵表示:

(1) 关联矩阵  $M(G)$ , (2) 邻接矩阵  $A(G)$   
握手定理 最短路算法 最优树 (最小生成树)  
特殊图:

(1) 树:

(2) 欧拉图:

路、基本通路、简单通路、欧拉通路、回路、  
一笔画问题