# 第四章　线性代数应用实验

- 线性方程组求解
- 特征值问题及应用
- 离散数据的多项式拟合
- 人口预测问题

# 矩阵相关命令

**1、实现矩阵A初等行变换命令：**

**(1)交换A的第i行与第j 行：**

**A([i，j]，:)=A([j，i]，:)**

**(2)将A的第i行乘以数k：**

**A(i，:)=k*A(i，:)**

**(3)将A的第j行的k倍加到第i行上：**

**A(i，:)=A(i，:)+k*A(j，:)**

2、矩阵A的秩、迹：rank(A)、trace(A)

3、矩阵化为最简行阶梯形矩阵：

rref(A)

4、向量a与b的内[外]积：

dot(a,b)　corss(a,b)

5、向量(矩阵)的范数：

norm(A)　norm(A,2)　norm(A,inf)

6、矩阵的行列式：det(A)

7、矩阵的逆：inv(A) 或 A^-1

## 8、矩阵左除、右除：\ /

**(1)逆矩阵左(右)乘 A\(/A)**

**(2)AX=b X=A\b**

例 $$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A\setminus B=\begin{bmatrix}0.25 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}\qquad A\,/\,B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

# 线性方程组求解 $AX=b$

或 A\b

或 linsolve (A,b)

或求解一般代数方程(组)命令 solve

solve(‘eqn1’,’eqn2’,…,’eqnN’,’var1’,’var2’,…,’varN’)

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$$

```
syms a
linsolve([a,1;3,-2],[2;1])
```

[x1 x2]=solve(‘a*x1+x2=2’,’3*x1-2*x2=1’,’x1’,’x2’)

x1 =5/(2*a + 3)     x2 =-(a - 6)/(2*a + 3)

例1 Hilbert矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$,

向量$b=\begin{bmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{bmatrix}$，求$A$的逆矩阵$A^{-1}, A^{3}$和$A$的行列式。

```
A=hilb(3);
b=[11/6;13/12;47/60];
A^-1      % inv(A)
A^3
c=det(A)
A\b
```

A为方阵

注意和.^区别

回忆:克莱姆法则求解线性方程组?

若$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$，则

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

```
A=[1 1/2 1/3;1/2 1/3 1/4;1/3 1/4 1/5];
b=[11/6;13/12;47/60];
B=A;B(:,1)=b;det(B)/det(A)
B=A;B(:,2)=b;det(B)/det(A)
B=A;B(:,3)=b;det(B)/det(A)
```

# 开普勒和行星运动定律

约翰·开普勒(1571年～1630)以数学的和谐性探索宇宙,继哥白尼之后第一个站出来捍卫太阳中心说。因创立行星运动定律,被称为“天上的立法者”。

第一定律：行星在通过太阳的平面内沿椭圆轨道运行,太阳位于椭圆的一个焦点上。

第二定律：在椭圆轨道上运行的行星速度不是常数，而是在相等时间内，行星与太阳的连线所扫过的面积相等。

第三定律：太阳系内所有行星公转周期的平方同行星轨道半长径的立方之比为一常数。

## 例4.2 小行星轨道问题

以太阳为坐标原点观察小行星，测得坐标数据

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 4.5596 | 5.0816 | 5.5546 | 5.9636 | 6.2756 |
| $y$ | 0.8145 | 1.3685 | 1.9895 | 2.6925 | 3.5265 |

椭圆二次曲线方程

$$a_1x^2 + 2a_2xy + a_3y^2 + 2a_4x + 2a_5y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1x_1^2 + 2a_2x_1y_1 + a_3y_1^2 + 2a_4x_1 + 2a_5y_1 = -1 \\ a_1x_2^2 + 2a_2x_2y_2 + a_3y_2^2 + 2a_4x_2 + 2a_5y_2 = -1 \\ a_1x_3^2 + 2a_2x_3y_3 + a_3y_3^2 + 2a_4x_3 + 2a_5y_3 = -1 \\ a_1x_4^2 + 2a_2x_4y_4 + a_3y_4^2 + 2a_4x_4 + 2a_5y_4 = -1 \\ a_1x_5^2 + 2a_2x_5y_5 + a_3y_5^2 + 2a_4x_5 + 2a_5y_5 = -1 \end{cases}$$

$$Az = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \\ x_5^2 & 2x_5y_5 & y_5 & x_5 & y_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$z = A^{-1}b$$

***MATLAB* 求解方程组方法：A\b**

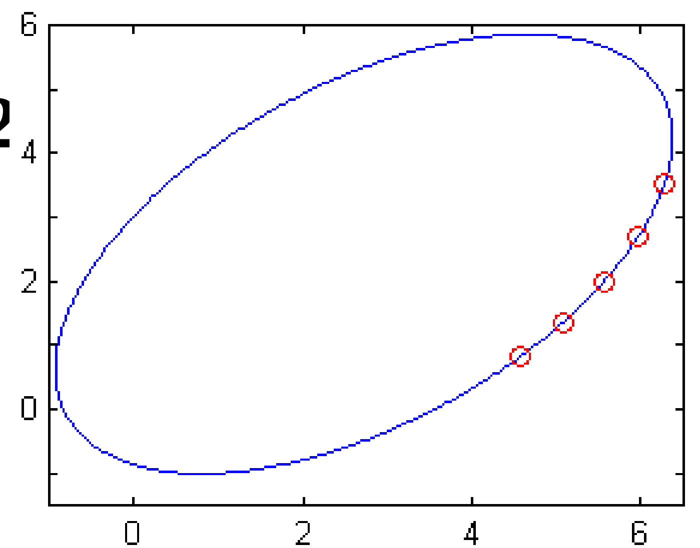
**创建方程组系数矩阵方法：**

**A=[X.^2, 2*X.*Y, Y.^2, X, Y]**

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

# 程序文件 mlab42.m

```
X=[4.5596;5.0816;5.5546;5.9636;6.2756];
Y=[0.8145;1.3685;1.9895;2.6925;3.5265];
A=[X.*X,2*X.*Y,Y.*Y,2*X,2*Y];
b=[-1;-1;-1;-1;-1];
z=A\b;
a1=z(1);a2=z(2);a3=z(3);a4=z(4);a5=z(5);
syms x y
F=a1*x^2+2*a2*x*y+a3*y^2
ezplot(F,[-1,6.5,-1.5,6])
hold on,plot(X,Y,'ro')
```



# 矩阵特征值问题

$A$是n阶方阵,求非零向量 $\alpha$ 和数 $\lambda$ 使得

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

称$\alpha$为**特征向量**,称$\lambda$ 为**特征值**.

MATLAB解算特征值问题方法

**lamda=eig(A)** —— 计算A的特征值,这里lamda是A的全部特征值构成的列向量。

**[P,D]=eig(A)** ——计算出A的全部特征值和对应的特征向量. 其中, D是对角矩阵,保存矩阵A的全部特征值; P是满阵, P的列向量构成对应于D的特征向量组。

## 例. 简单迁移模型

**每年A镇的人口10%迁往B镇;B镇的人口15%迁往A镇. 假设某年A、B两镇人口各有120人和80人.问两年后两镇人口数量分布如何?**

**设两镇总人口不变,人口流动只限于两镇之间.**

**引入变量:**

$x_1^{(k)}$ **表示 A 镇第 k 年人口数量;**

$x_2^{(k)}$ **表示 B 镇第 k 年人口数量.**

**则由第 k 年到第 k+1 年两镇人口数量变化规律如下:**

$$x_1^{(k+1)} = 0.9x_1^{(k)} + 0.15x_2^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.85x_2^{(k)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.15 \\ 0.1 & 0.85 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X^{(k+1)} = A\,X^{(k)}$$

$$X^{(2)} = AX^{(1)} = A(AX^{(0)}) = A^2X^{(0)} \qquad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \end{bmatrix}$$

```
A=[0.9,0.15;0.1,0.85];
X0=[120;80];
X2=A^2*X0
D=eig(A)
```

$$X2 = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1.00 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

$$\because \ A = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}, \therefore \begin{cases} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 1-p-q, \\ \alpha_1 = [q, p]^T, \\ \alpha_2 = [-1, 1]^T, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore X^n &= A^n X^{(0)} \\ &= A^n(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2) \\ &= c_1 A^n \alpha_1 + c_2 A^n \alpha_2 \\ &= c_1 \lambda_1{}^n \alpha_1 + c_2 \lambda_2{}^n \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\because x_1^{(0)} : x_2^{(0)} = q : p \ \therefore X^{(n)} = c_1\alpha_1 = X^{(0)}$$

## 例4.5 出租汽车问题

出租汽车公司在仅有A城和B城的海岛上, 设了A,B两营业部。如果周一A城有120辆可出租汽车，而B城有150辆。统计数据表明，平均每天A城营业部汽车的10%被顾客租用开到B城 , B城营业部汽车的12%被开到了A城。假设所有汽车正常，试计算一周后两城的汽车数量。寻找方案使每天汽车正常流动而A城和B城的汽车数量不增不减。

设第$n$天$A$城营业部汽车数为$x_1^{(n)}$，$B$城营业部汽车数为$x_2^{(n)}$。 则有

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{bmatrix}$$

两营业部汽车总数量为：270

矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{bmatrix}$ 特征值 $\lambda_1 = 1$

特征向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

$x_1 + x_2 = 270$

$x_1 : x_2 = 1.2:1$

近似解

$x_1 = 147$

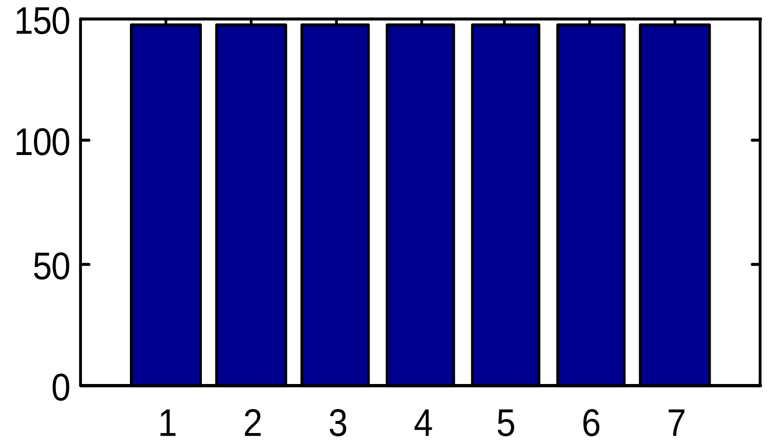
$x_2 = 123$

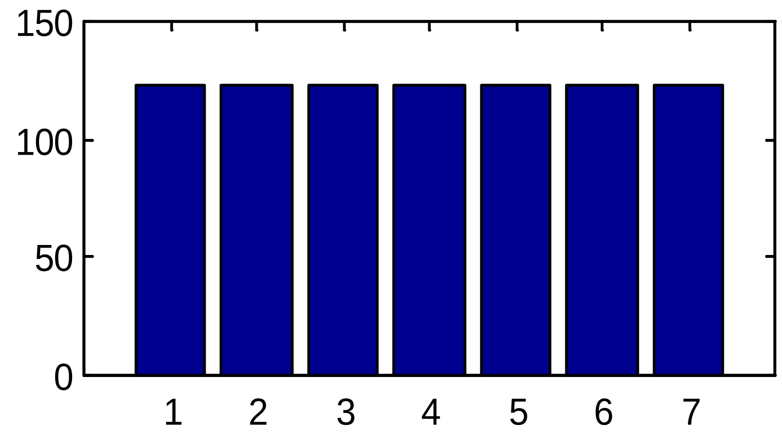
**Cars =**

**147.00  147.06  147.1068  147.1433  147.1718  147.1940  147.2113**

**123.00  122.94  122.8932  122.8567  122.8282  122.8060  122.7887**

```
X=[147;123];
A=[0.9,0.12;0.1,0.88];
Cars=X;
for k=1:6
   X=A*X;
   Cars=[Cars,X];
end
Cars
figure(1),bar(Cars(1,:))
figure(2),bar(Cars(2,:))
```



# 超定方程组的最小二乘解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

**当方程数超过未知数个数时, 称为超定方程组**

**超定方程组最小二乘解是使残差平方和最小的解**

$$S(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} [b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j]^2$$

**MATLAB求解超定方程组方法和求解一般线性方程组方法相同： x = A\b**

# 例4.9 求超定方程组最小二乘解

$$\begin{cases} 2x+4y=11 \\ 3x-5y=3 \\ x+2y=6 \\ 4x+2y=14 \end{cases}$$

```
A=[2,4;3,-5;1,2;4,2];
b=[11;3;6;14];
X=A\b
R=b-A*X;
S=R'*R
```

```
X =
    2.9774
    1.2259

S =
     0.5154
```

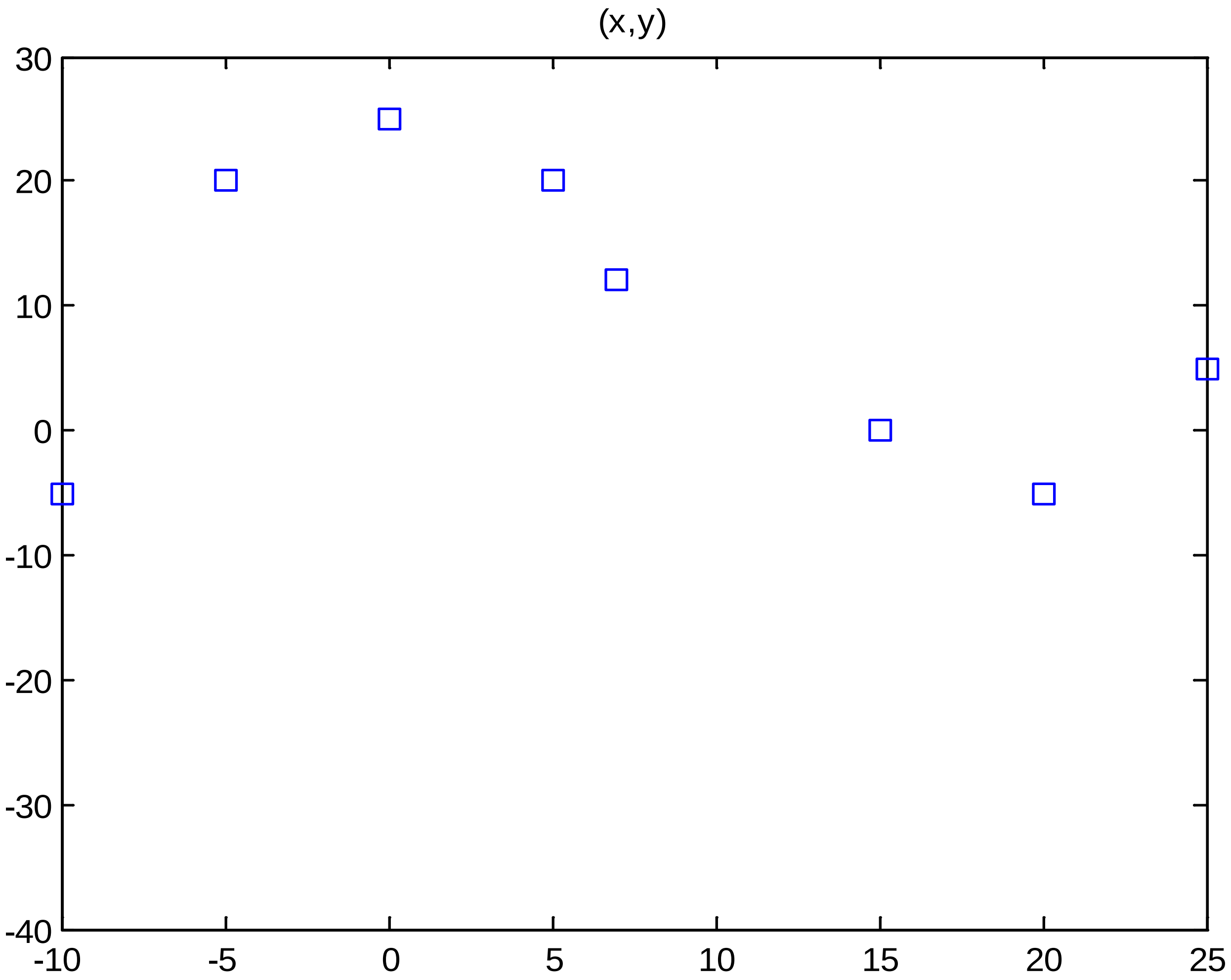
# 离散数据的多项式拟合方法

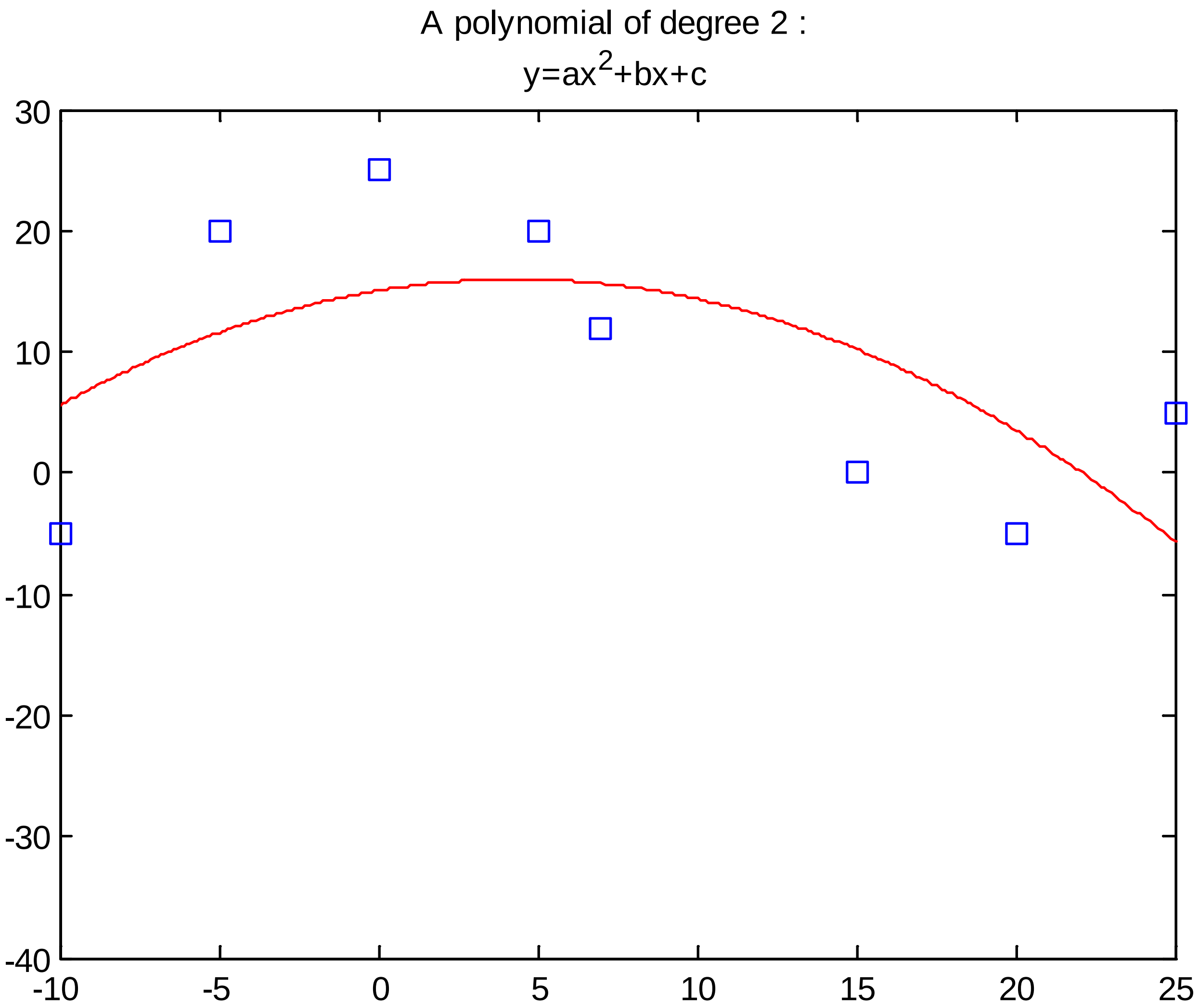
| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | …… | $x_m$ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $f(x)$ | $y_1$ | $y_2$ | …… | $y_m$ |

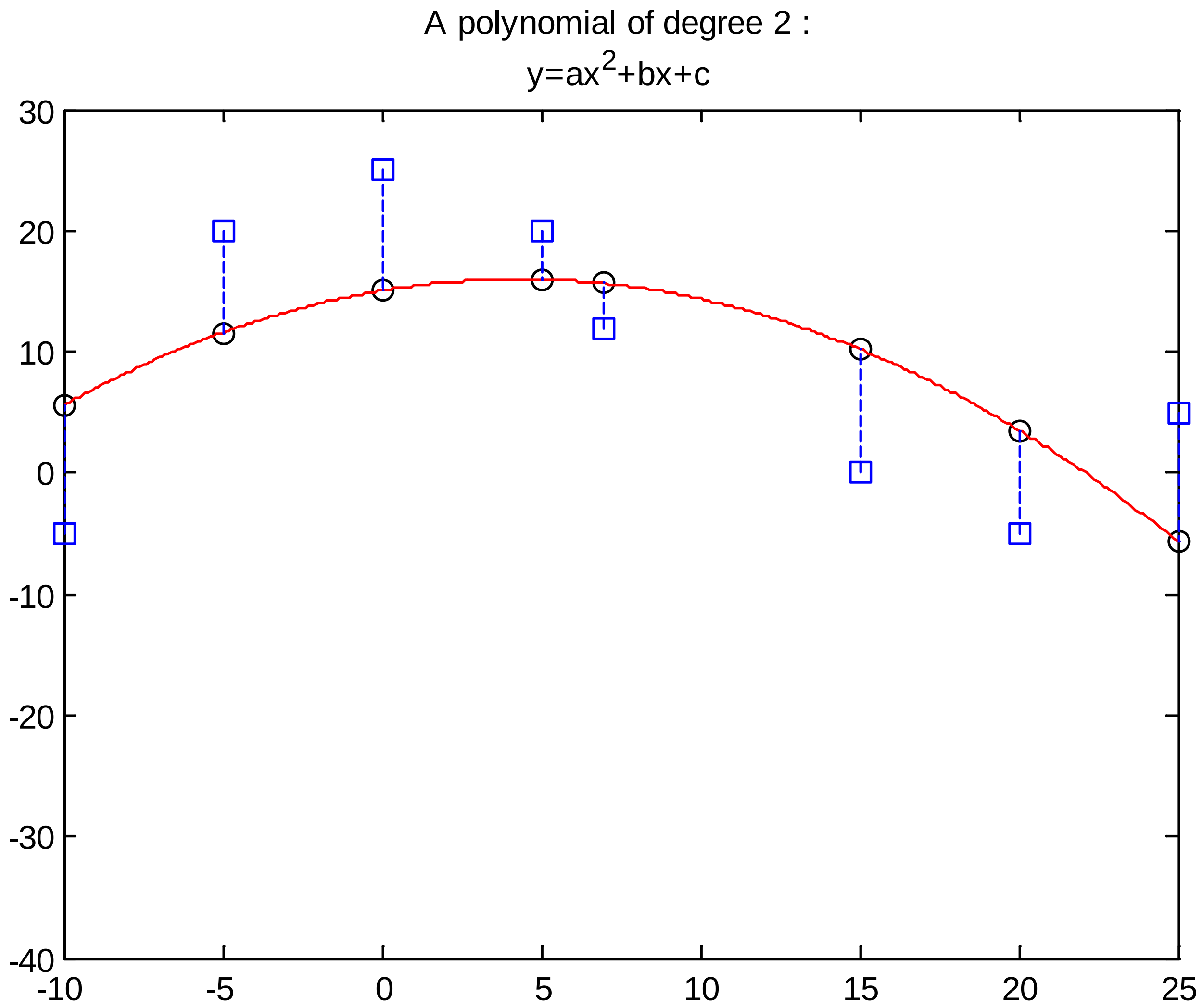
**求一个$n$ 次多项式 ( $n < m$ )**

$$P(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n x + a_{n+1}\text{，}$$

**使得这条曲线尽可能多的穿过所有的点。**


(x,y)
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25


A polynomial of degree 2 :
y=ax2+bx+c
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25


A polynomial of degree 2 :
y=ax2+bx+c
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25

**求 $n$ 次多项式 ( $n < m$ )**

$$P(x) = a_1x^n + a_2 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_n x + a_{n+1}$$

**使得**

$$\min \sum_{j=1}^{m} [y_j - P(x_j)]^2$$

**MATLAB求解多项式拟合方法如下：**

**$P$ =polyfit($x$，$y$，$n$)**

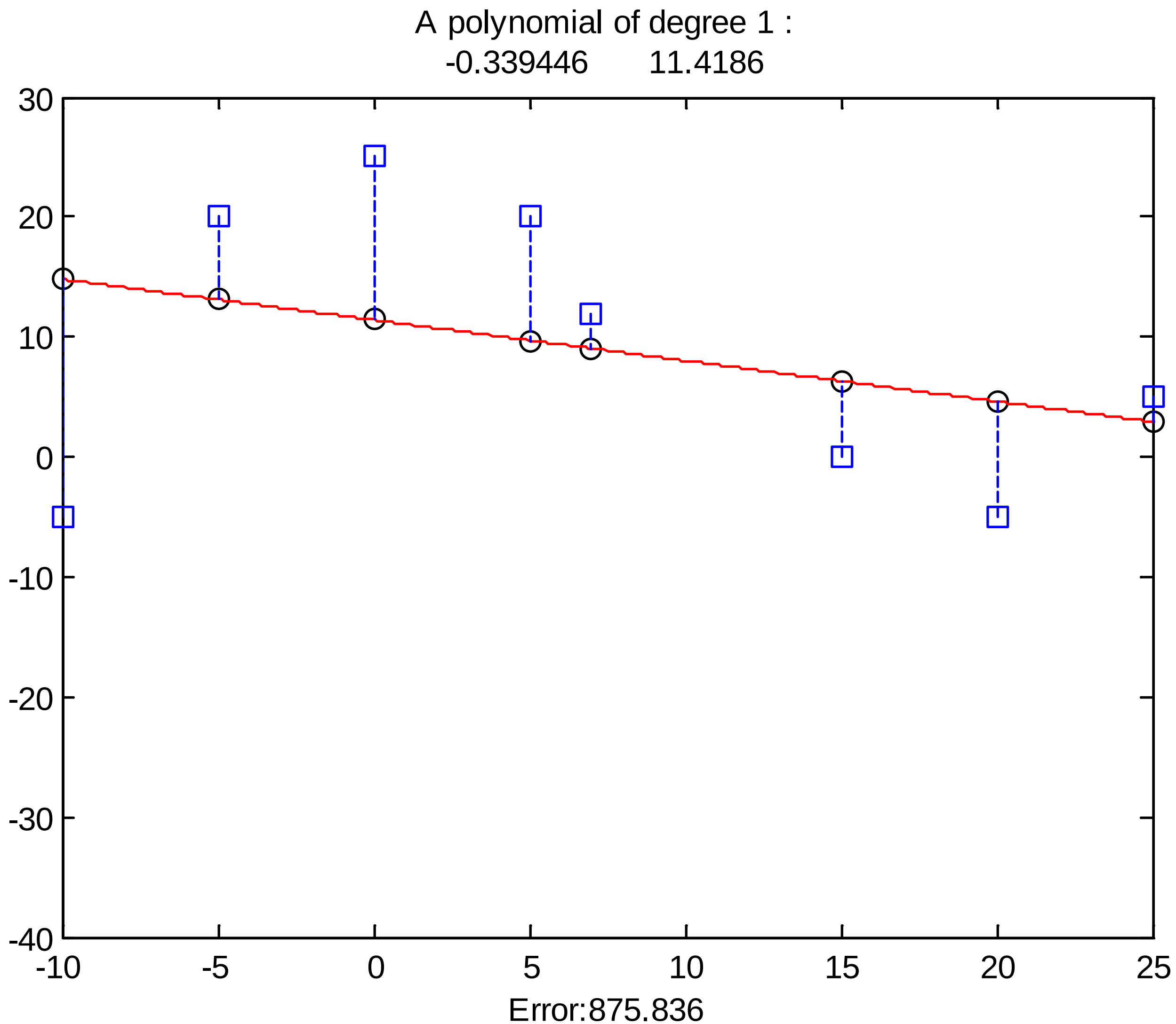
**输出变量$P$是一个具有($n$+1) 个数的一维数组，表示拟合出的$n$次多项式$P(x)$的系数(多项式降幂排列 )。**

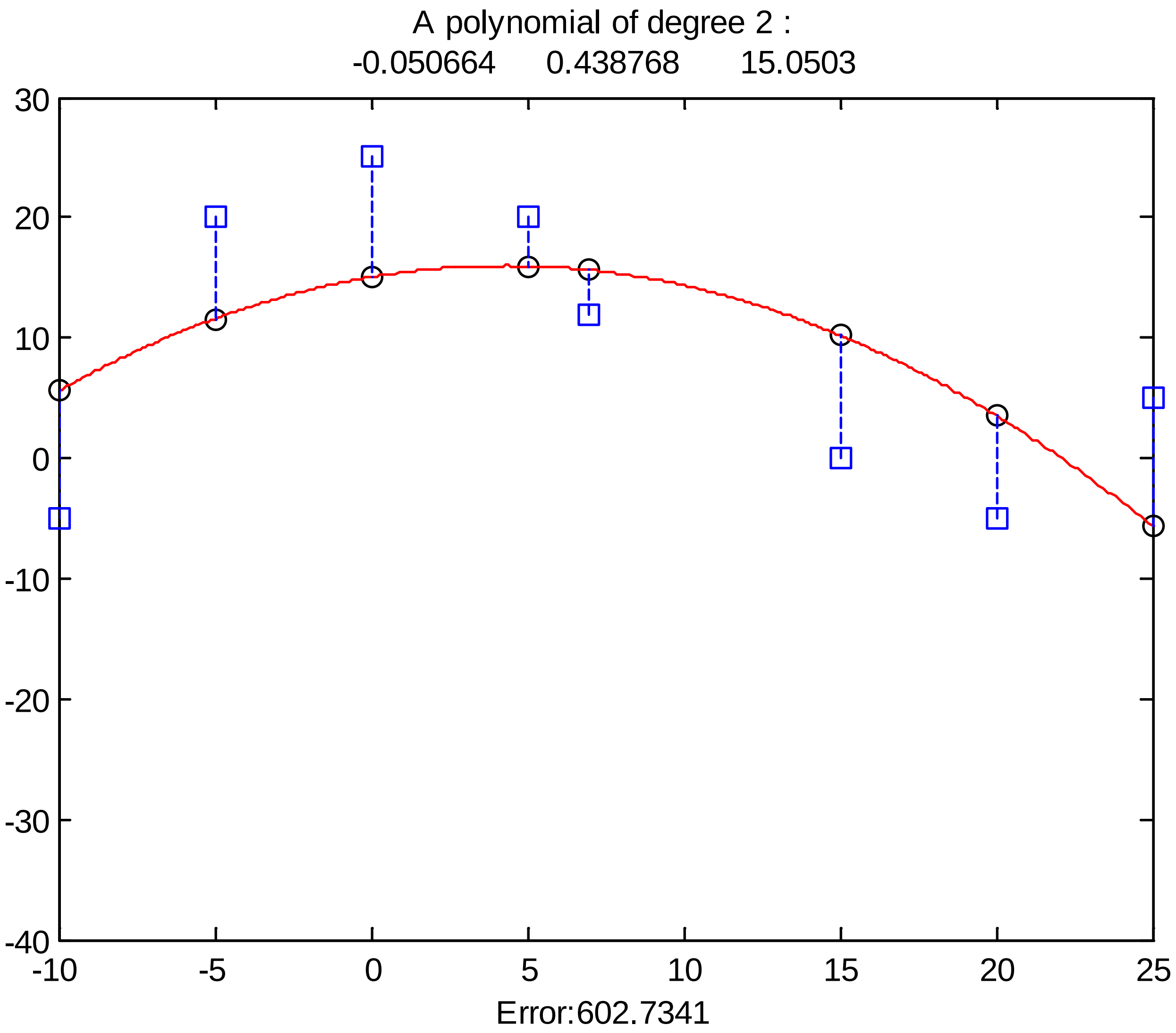
## 多项式求值

$$v=\text{polyval}(P, x)$$

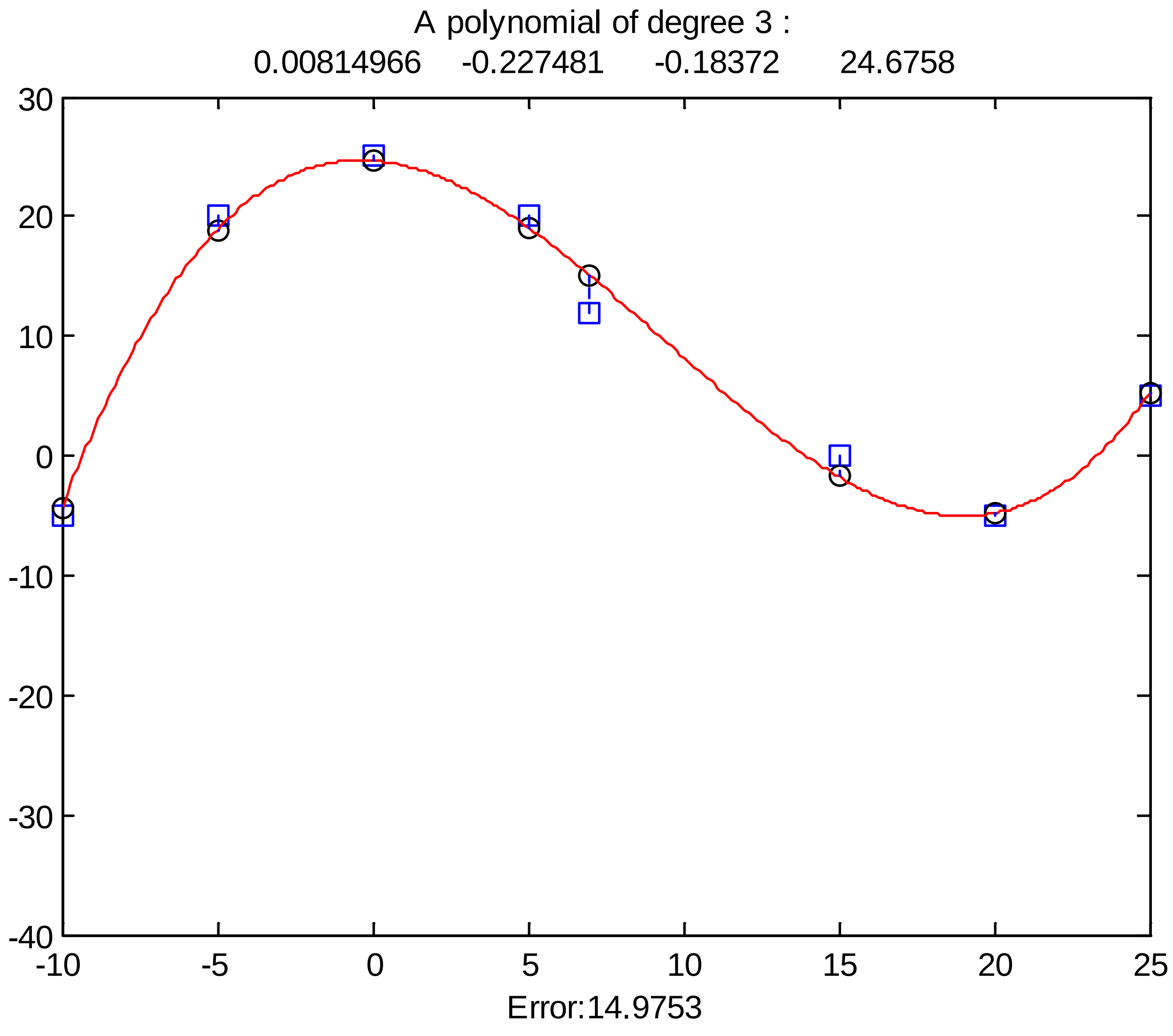
输入变量$P$是一个具有$(n+1)$ 个数的一维数组，表示一个$n$次多项式$P(x)$ 。

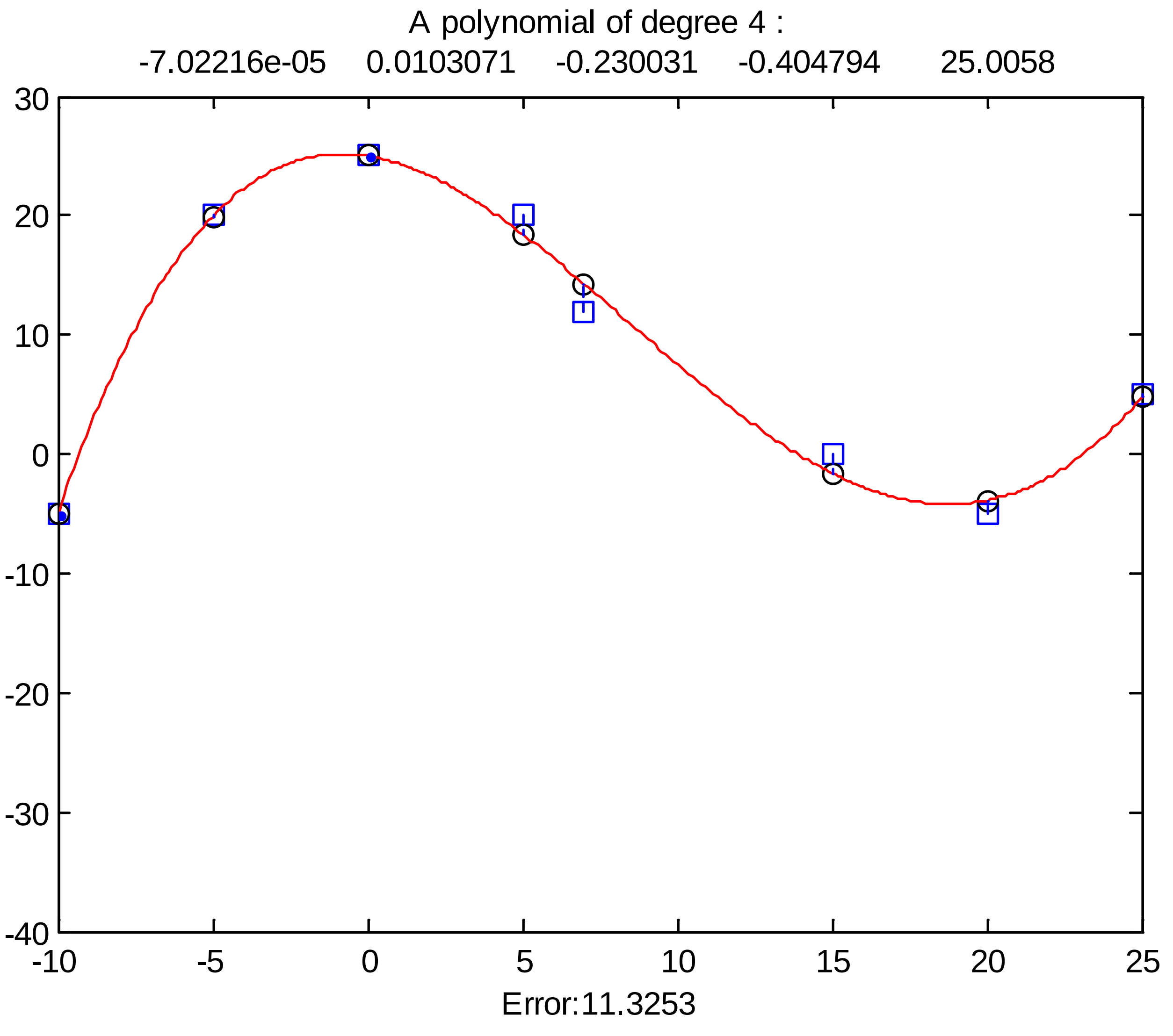
这里$x$可以是向量，$v$是多项式在$x$的每一个分量处的函数值所组成的向量.


A polynomial of degree 1 :
-0.339446 11.4186
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:875.836

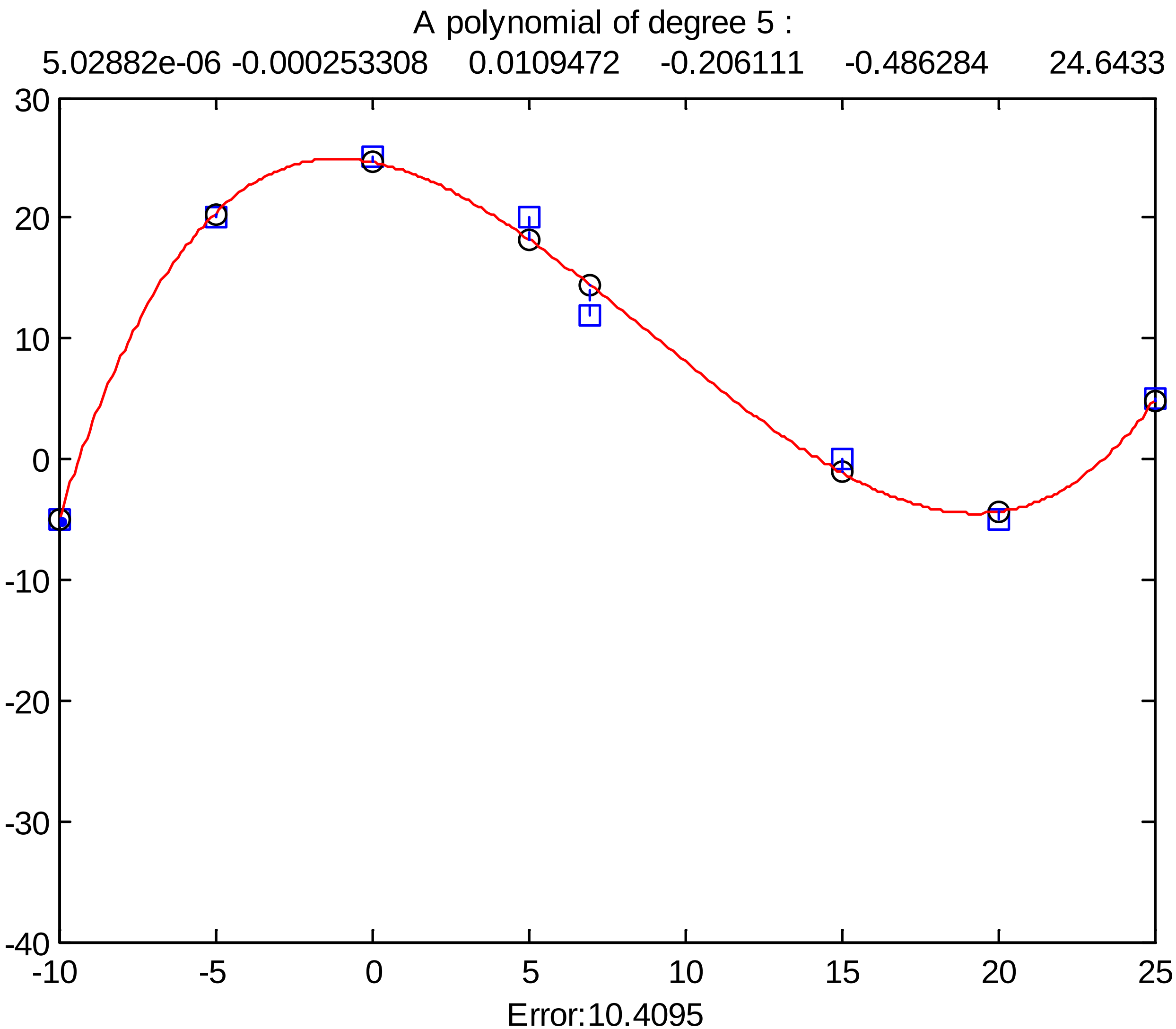


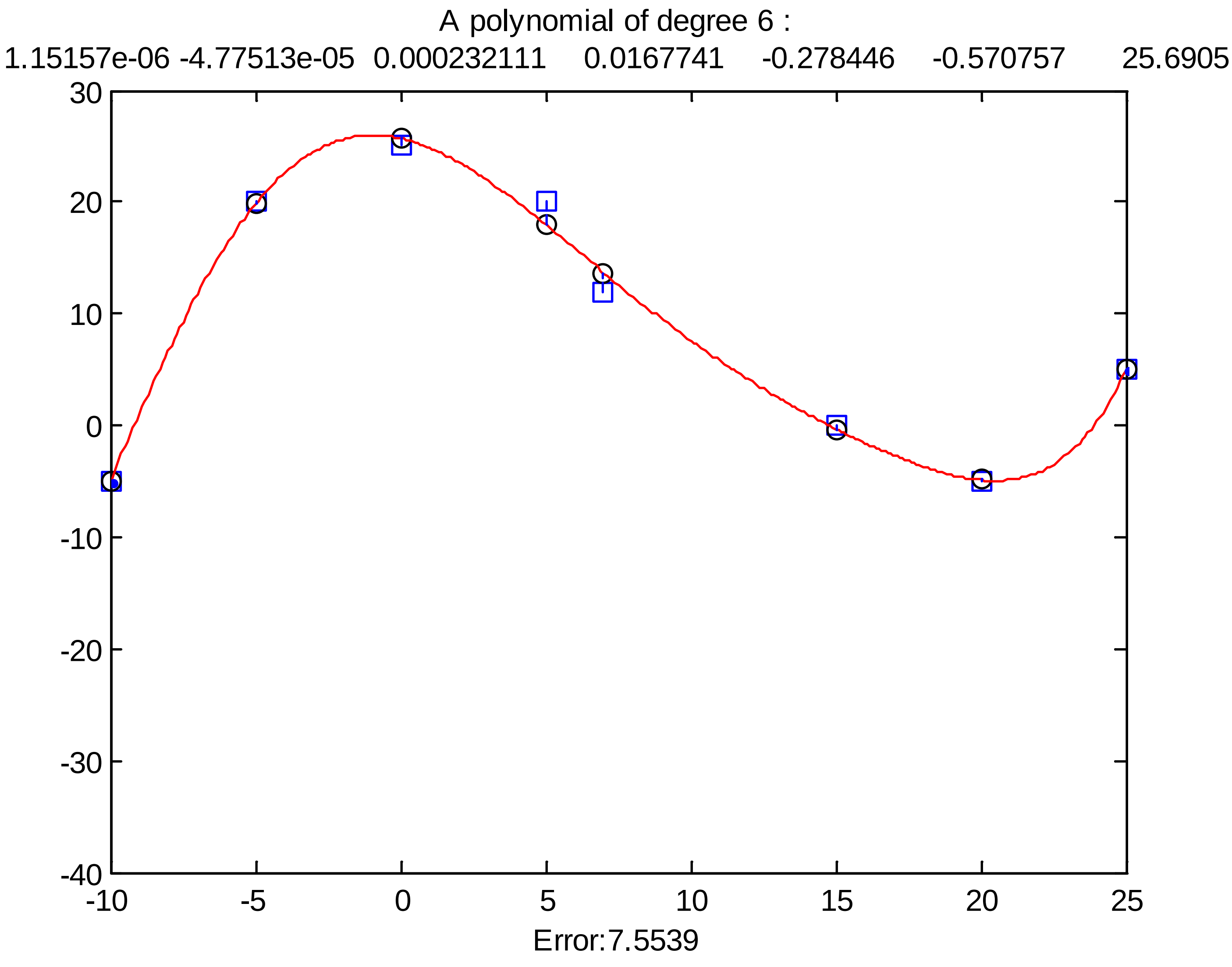
A polynomial of degree 2 :
-0.050664 0.438768 15.0503
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:602.7341

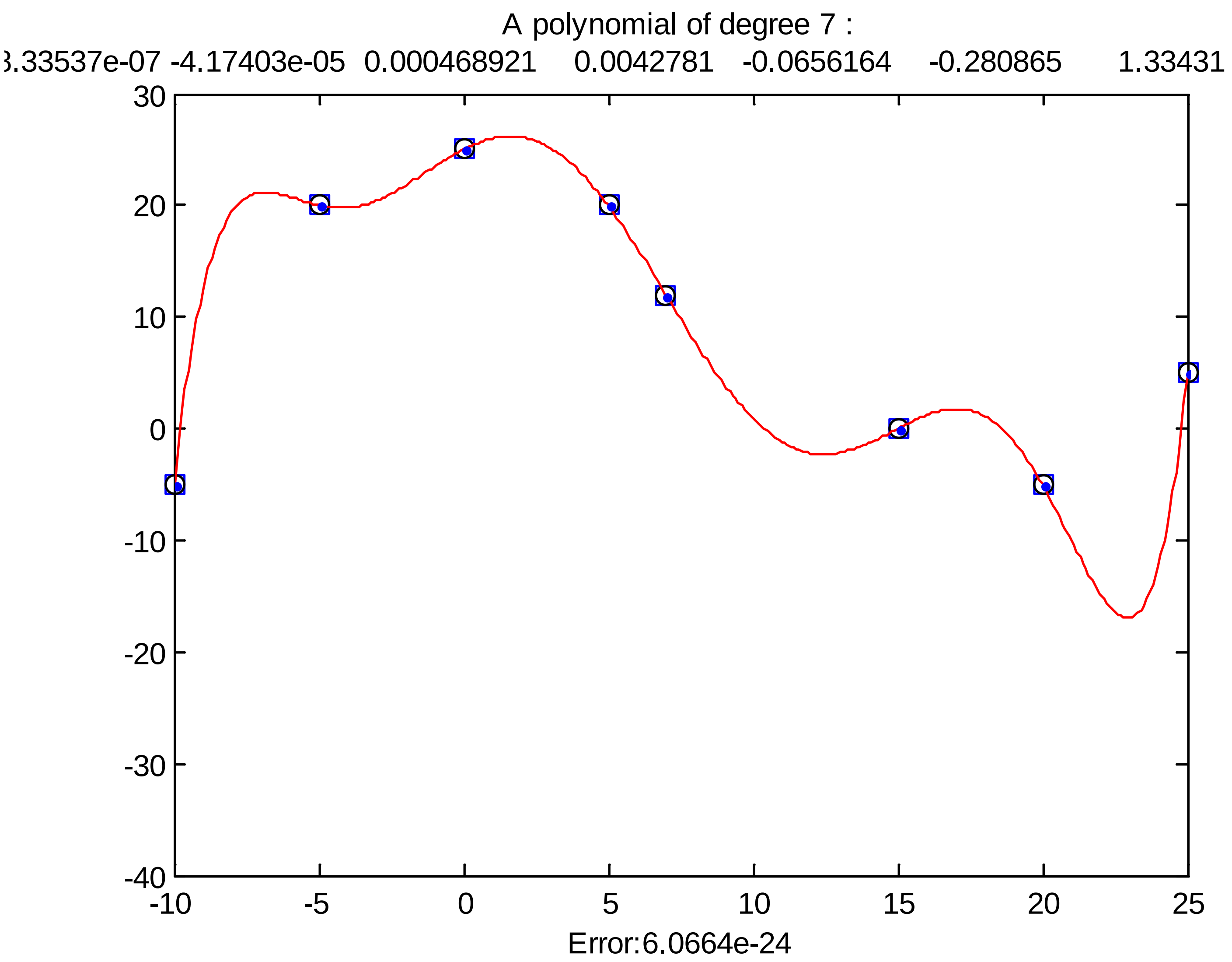

A polynomial of degree 3 :
0.00814966 -0.227481 -0.18372 24.6758
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:14.9753

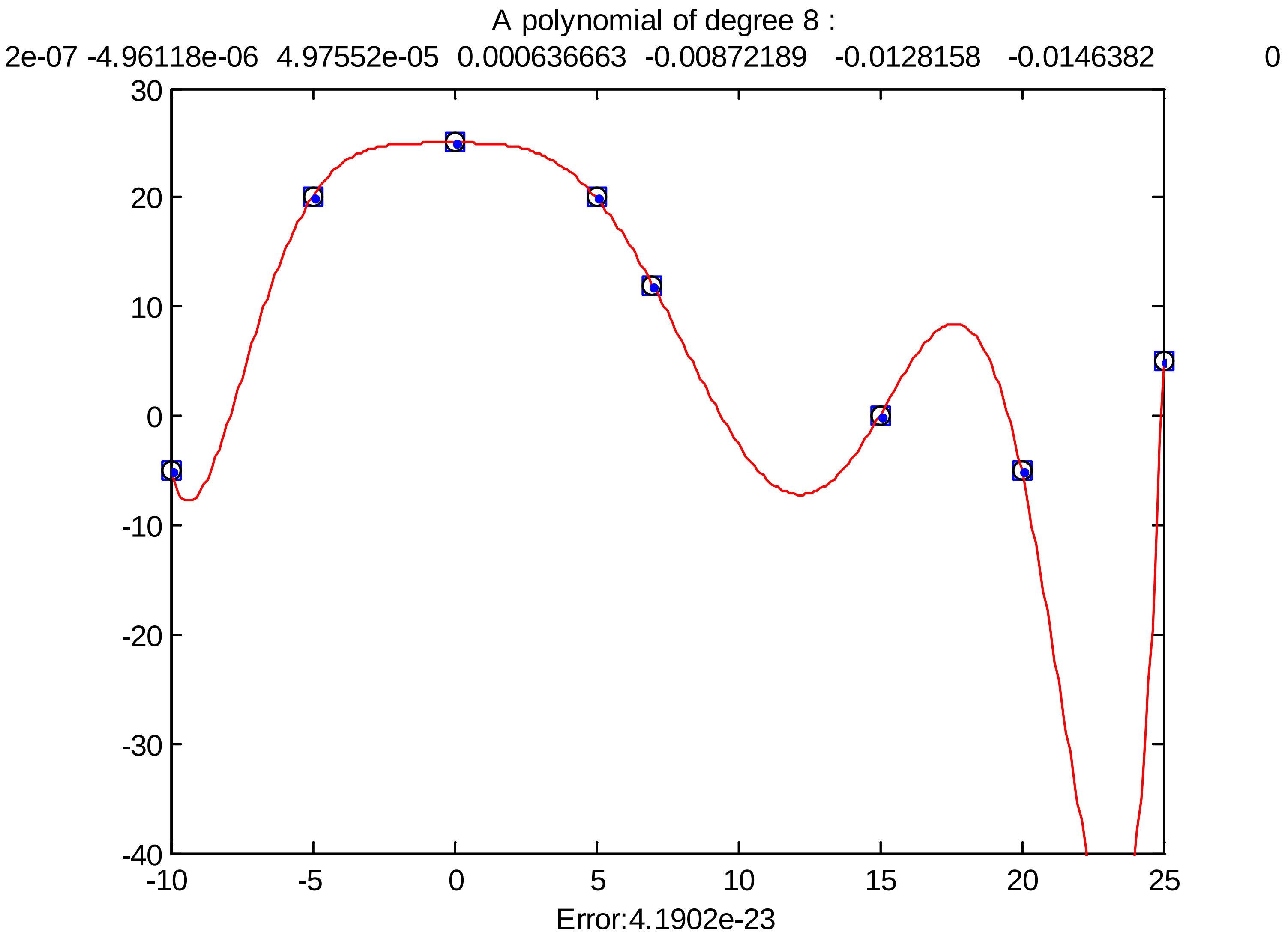


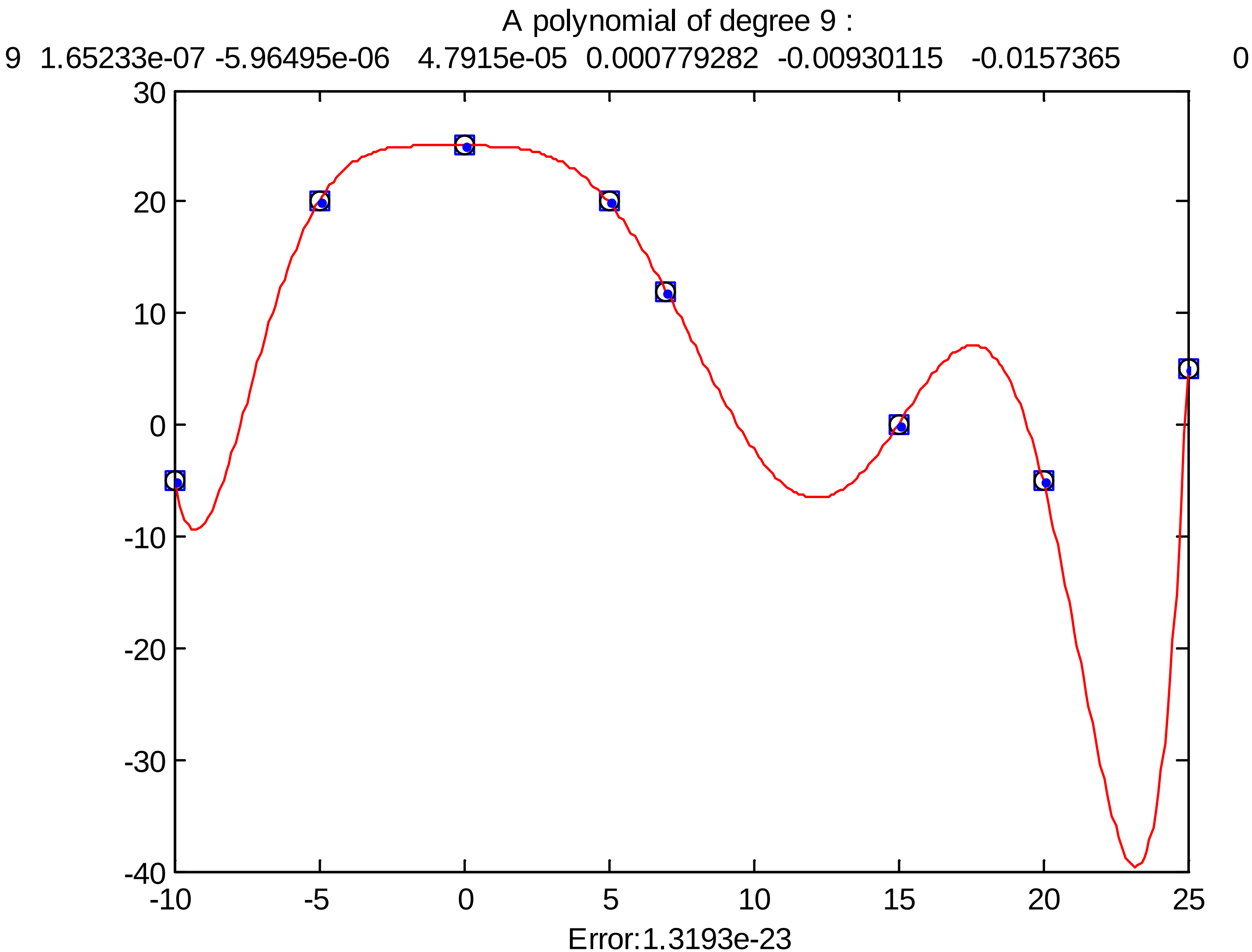
A polynomial of degree 4 :
-7.02216e-05 0.0103071 -0.230031 -0.404794 25.0058
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:11.3253

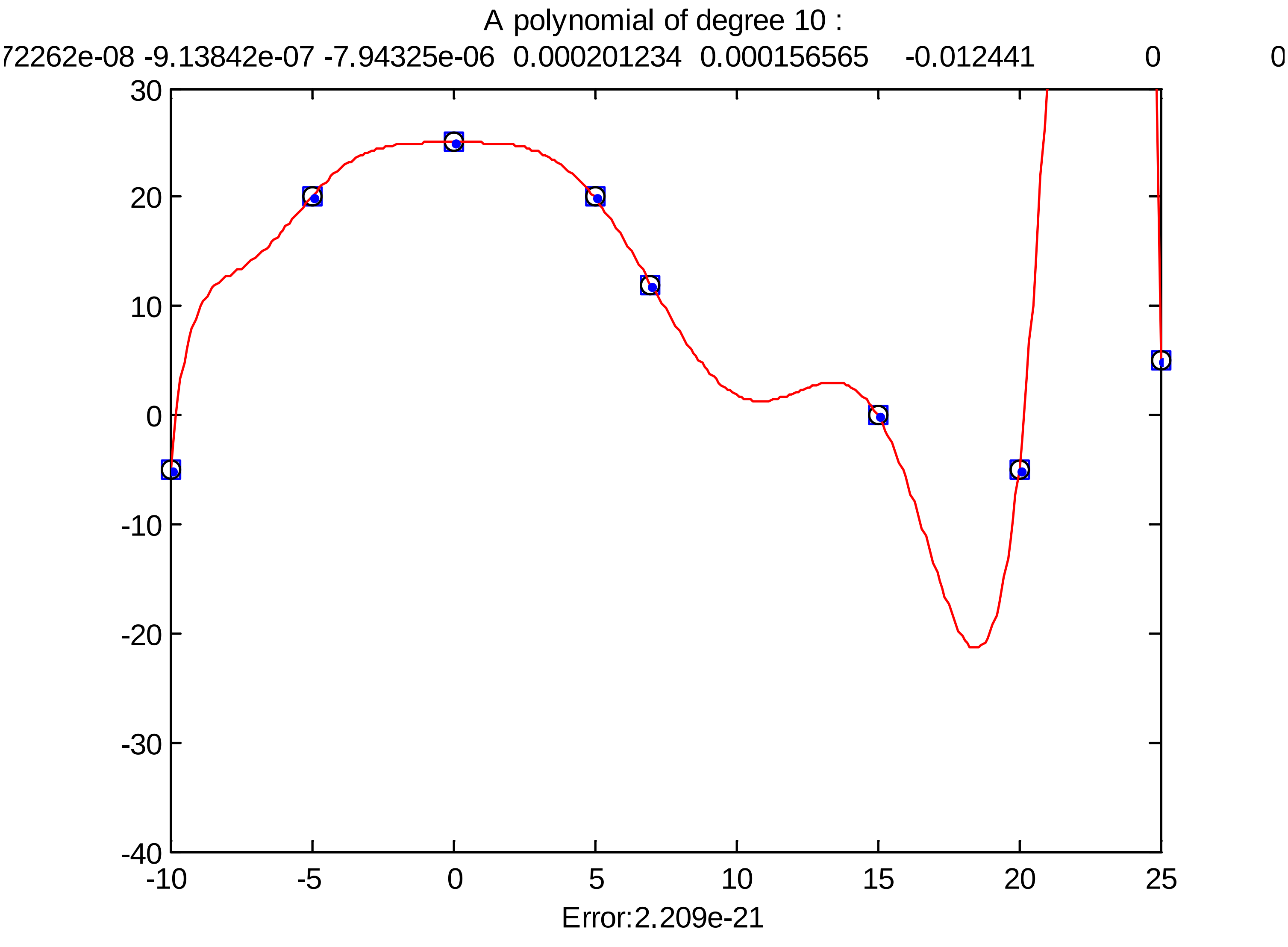

A polynomial of degree 5 :
5.02882e-06 -0.000253308 0.0109472 -0.206111 -0.486284 24.6433
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:10.4095


A polynomial of degree 6 :
1.15157e-06 -4.77513e-05 0.000232111 0.0167741 -0.278446 -0.570757 25.6905
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:7.5539


A polynomial of degree 7 :
3.33537e-07 -4.17403e-05 0.000468921 0.0042781 -0.0656164 -0.280865 1.33431
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:6.0664e-24


A polynomial of degree 8 :
2e-07 -4.96118e-06 4.97552e-05 0.000636663 -0.00872189 -0.0128158 -0.0146382 0
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:4.1902e-23


A polynomial of degree 9 :
9 1.65233e-07 -5.96495e-06 4.7915e-05 0.000779282 -0.00930115 -0.0157365 0
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:1.3193e-23

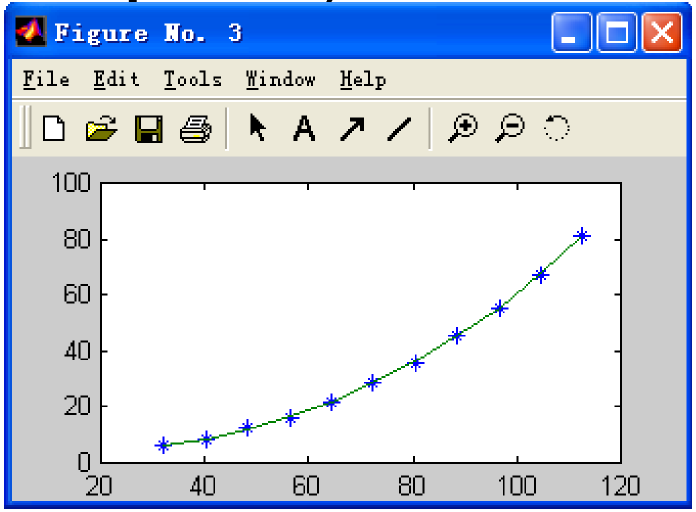

A polynomial of degree 10 :
72262e-08 -9.13842e-07 -7.94325e-06 0.000201234 0.000156565 -0.012441 0 0
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5
10
15
20
25
Error:2.209e-21

# 汽车紧急刹车问题数据拟合实验

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 |
| T | 20 | 28 | 41 | 53 | 72 | 93 | 118 | 149 | 182 | 221 | 266 |

V表示刹车时汽车行驶速度(英里/小时),T表示刹车后汽车滑行距离(英尺)

```
v=[20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70]*1.609;
T=[20 28 41 53 72 93 118 149 182 221 266]*.3048;
P2=polyfit(v,T,2);T2=polyval(P2,v);
R2=sum((T-T2).^2)
figure(2),plot(v,T,'*',v,T2)
P3=polyfit(v,T,3);T3=polyval(P3,v);
R3=sum((T-T3).^2)
figure(3),plot(v,T,'*',v,T3)
```




R2 = 1.9634 R3 = 0.4080

# 人口预测问题

据统计，上世纪六十年代世界人口数据如下

| 年 | 1960 | 1961 | 1962 | 1963 | 1964 | 1965 | 1966 | 1967 | 1968 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (亿) | 29.72 | 30.61 | 31.51 | 32.13 | 32.34 | 32.85 | 33.56 | 34.2 | 34.83 |

分析：根据马尔萨斯人口理论，人口增长率与人口数量N成正比，用微分方程描述为

$$\frac{dN}{dt} = aN \;\Rightarrow\; \ln N = a\,t + b \;\Rightarrow\; N(t) = \exp(\,a\,t + b\,)$$

(1)对数变换： $a\,t + b$ =log(N)

➔ (2)线性拟合： E=polyfit(t,log(N),1)

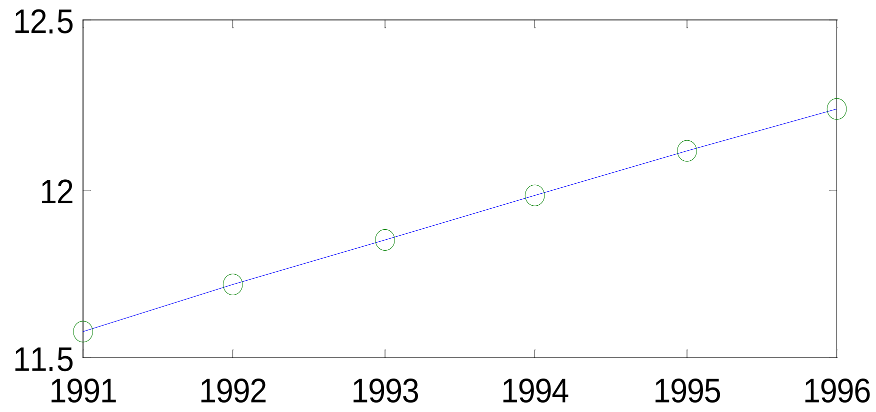
(3)计算函数:PE=exp(polyval(E,t))

# 中国人口数据资料(单位:亿)

| T | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 11.58 | 11.72 | 11.85 | 11.98 | 12.11 | 12.24 |

## 线性函数拟合

$$N(t) = a_1 t + a_2$$




(1) 求 L=[ $a_1$ , $a_2$]

L= polyfit(T,N,1)

(2) 求线性函数值

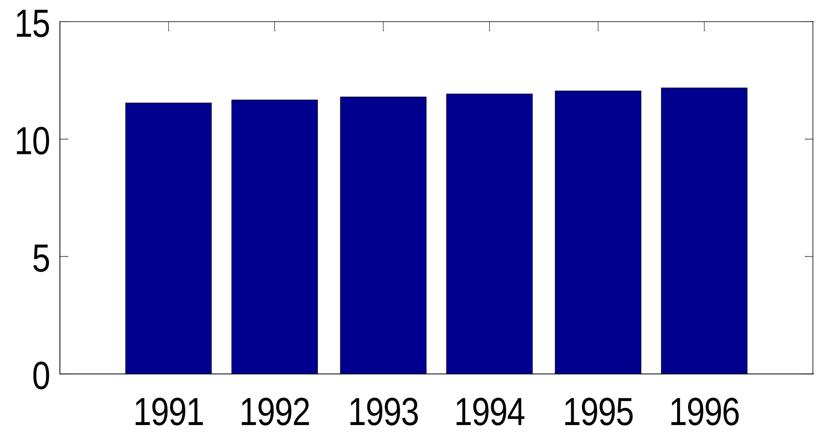
LT=polyval(L,T)

(3) 求残差平方和

r2=sum((N-LT).^2)

# 中国人口数据的线性拟合实验

```
T=[1991:1996];
N=[11.58, 11.72, 11.85, 11.98, 12.11, 12.24];
figure(1),bar(T,N)
L=polyfit(T,N,1)
LT=polyval(L,T);
figure(2),plot(T,N,'o',T,LT)
r2=sum((N-LT).^2)
L2009=polyval(L,2009)
```

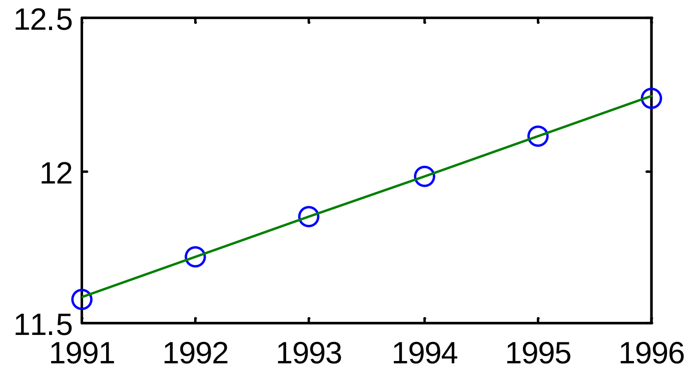


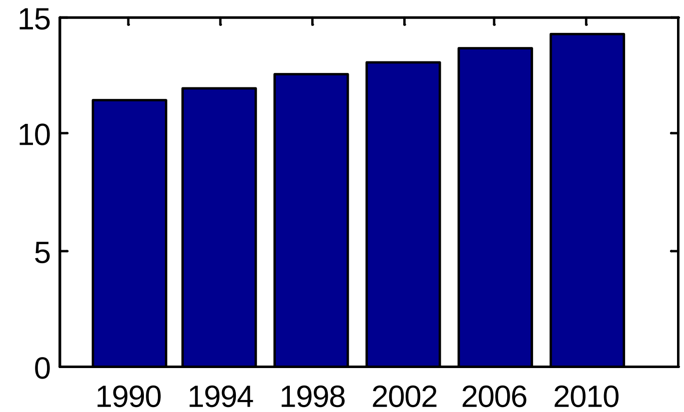

```
r2 =  4.7619e-005

L2009 =   13.9505
```

# 中国人口数据的指数函数拟合实验

```
T=1991:1996;
N=[11.58, 11.72, 11.85, 11.98,
y=log(N);E=polyfit(T,y,1);
PE=exp(polyval(E,T));
figure(1),plot(T,N,'o',T,PE)
R2=sum((N-PE).^2)
Te=1990:4:2011
PE1=exp(polyval(E,Te))
figure(2),bar(Te,PE1)
```

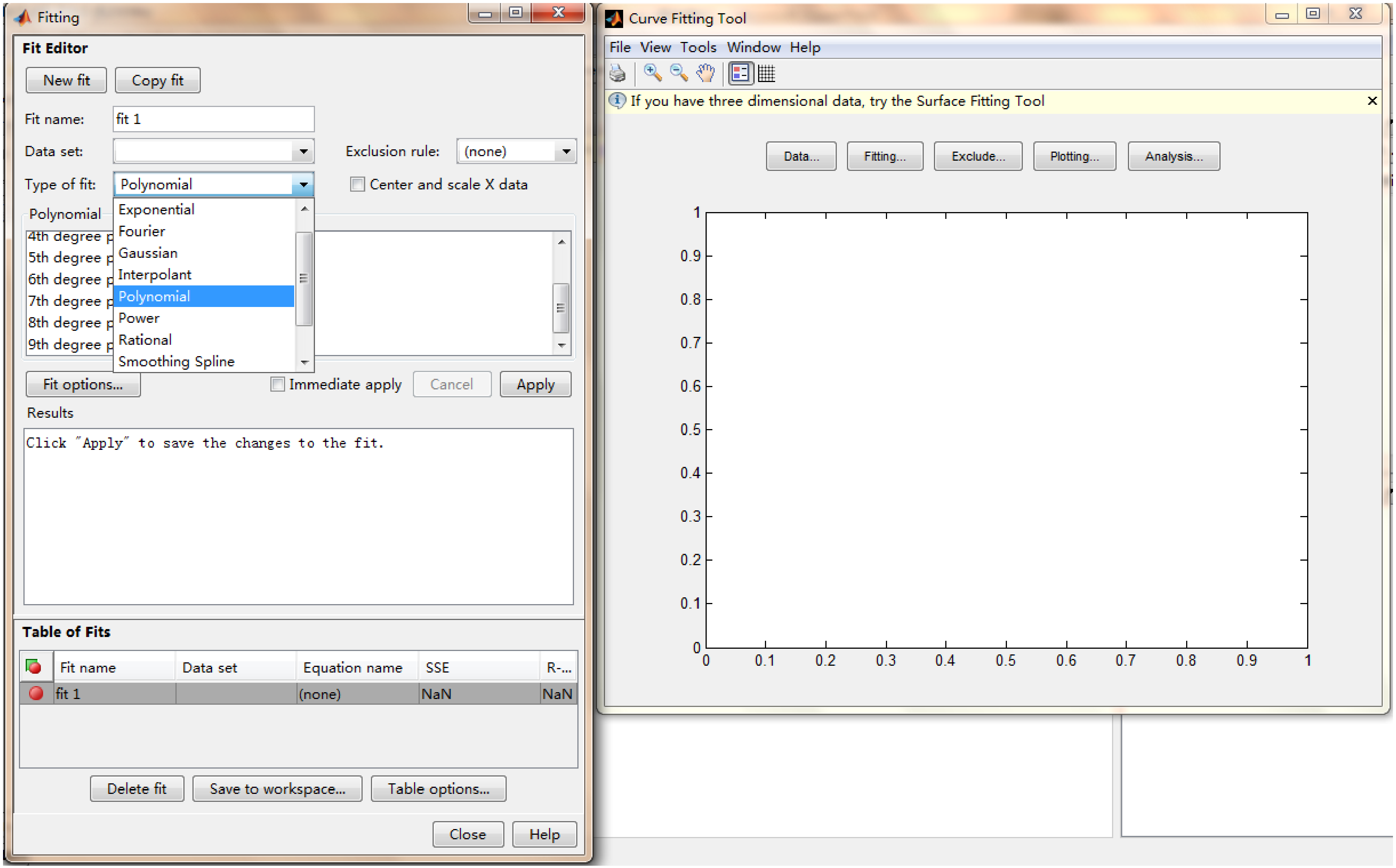



PE1 =

11.4599   11.9771   12.5177   13.0827   13.6731   14.2902

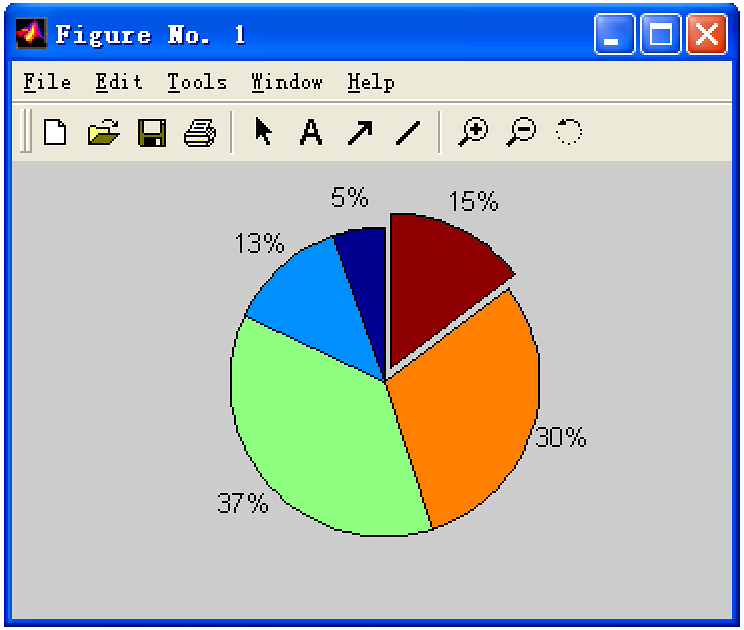
# 曲线拟合工具箱 cftool

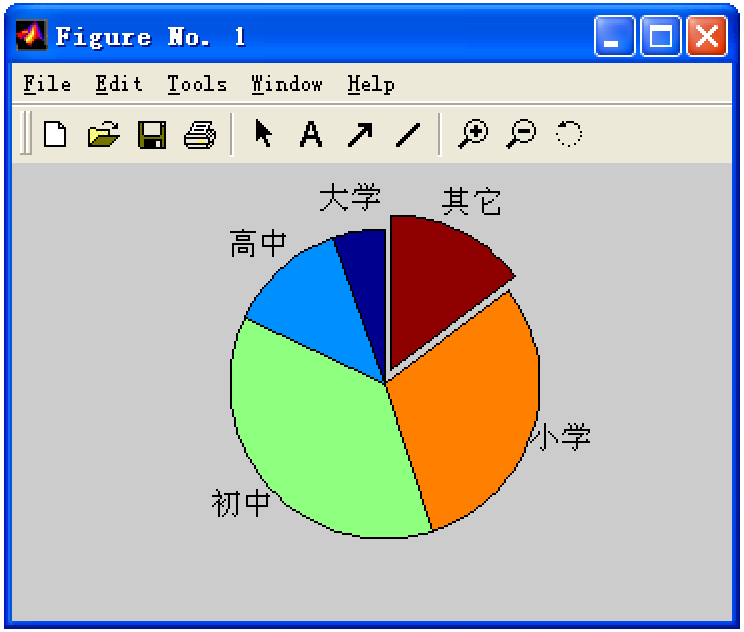


# “饼图”绘制命令 pie( )

**例 中国人口网数据显示:我国受教育程度大学以上占5.42％、高中12.59、初中36.93％、小学30.44％ 。**

```
R=[5.42,12.59,36.93,30.44];R(5)=100-sum(R)
pie(R,[0,0,0,0,1])
pie(R,[0,0,0,0,1],{'大学','高中','初中','小学','其它'})
```



# 思考题与练习题

1. 行星轨道的二次曲线方程中，二次项系数满足什么条件时，能保证二次曲线方程是椭圆方程?

2.用马尔萨斯模型预测中国人口达到20亿，将会在多少年以后发生？以中国960万平方公里国土面积计算，人均占多少平方米?

3. 设非零正数p<1,q<1.　证明矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$$

有1特征值,对应的特征向量

$$\alpha=[q \quad p]^T$$