空间解析几何

返回

3.1 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

二、 向量的概念

三、向量的线性运算

四、向量在轴上的投影

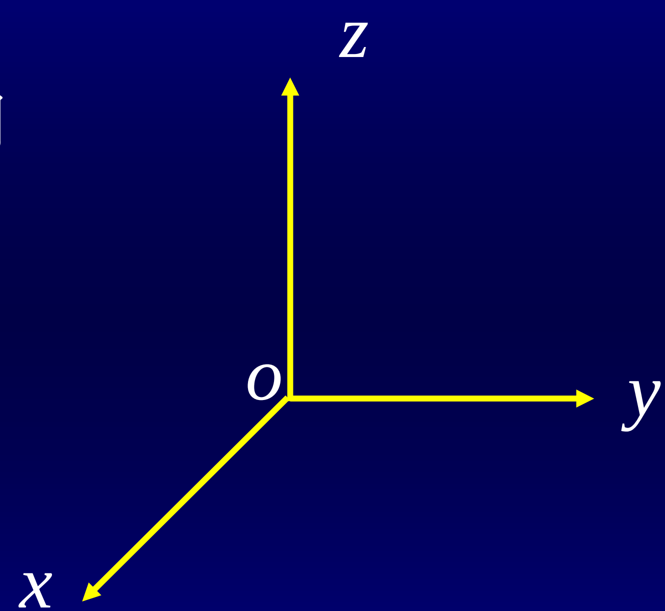
五、 线性运算的几何意义

六、向量的模与方向余弦

3.1 空间直角坐标系与向量

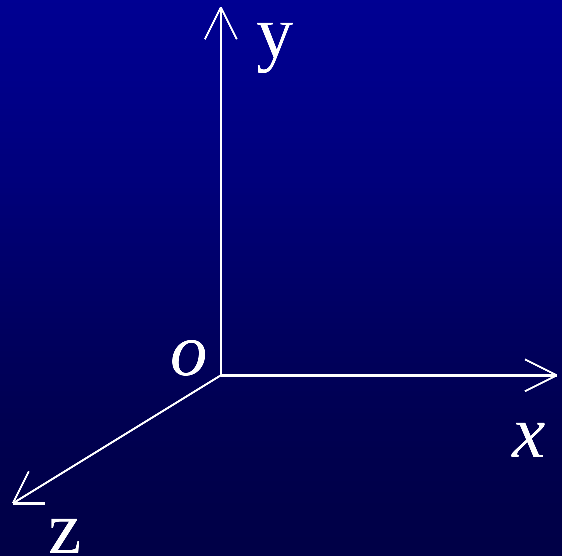
一、空间直角坐标系

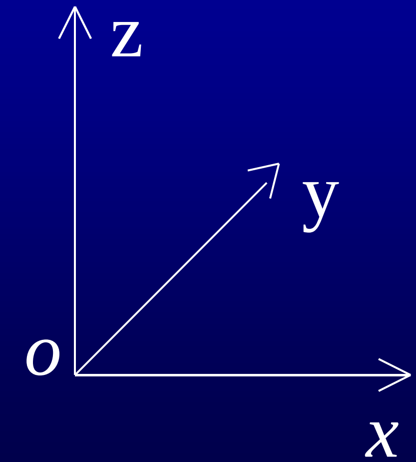
三个坐标轴的正方向符合右手系.



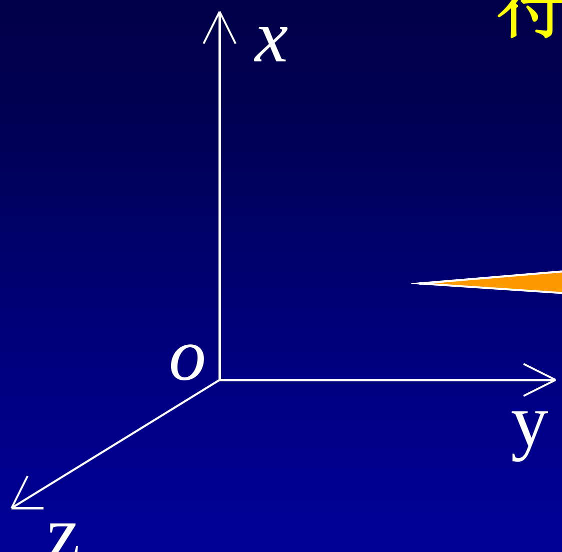
即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向.

x 轴: 横轴；y 轴： 纵轴；z 轴： 竖轴

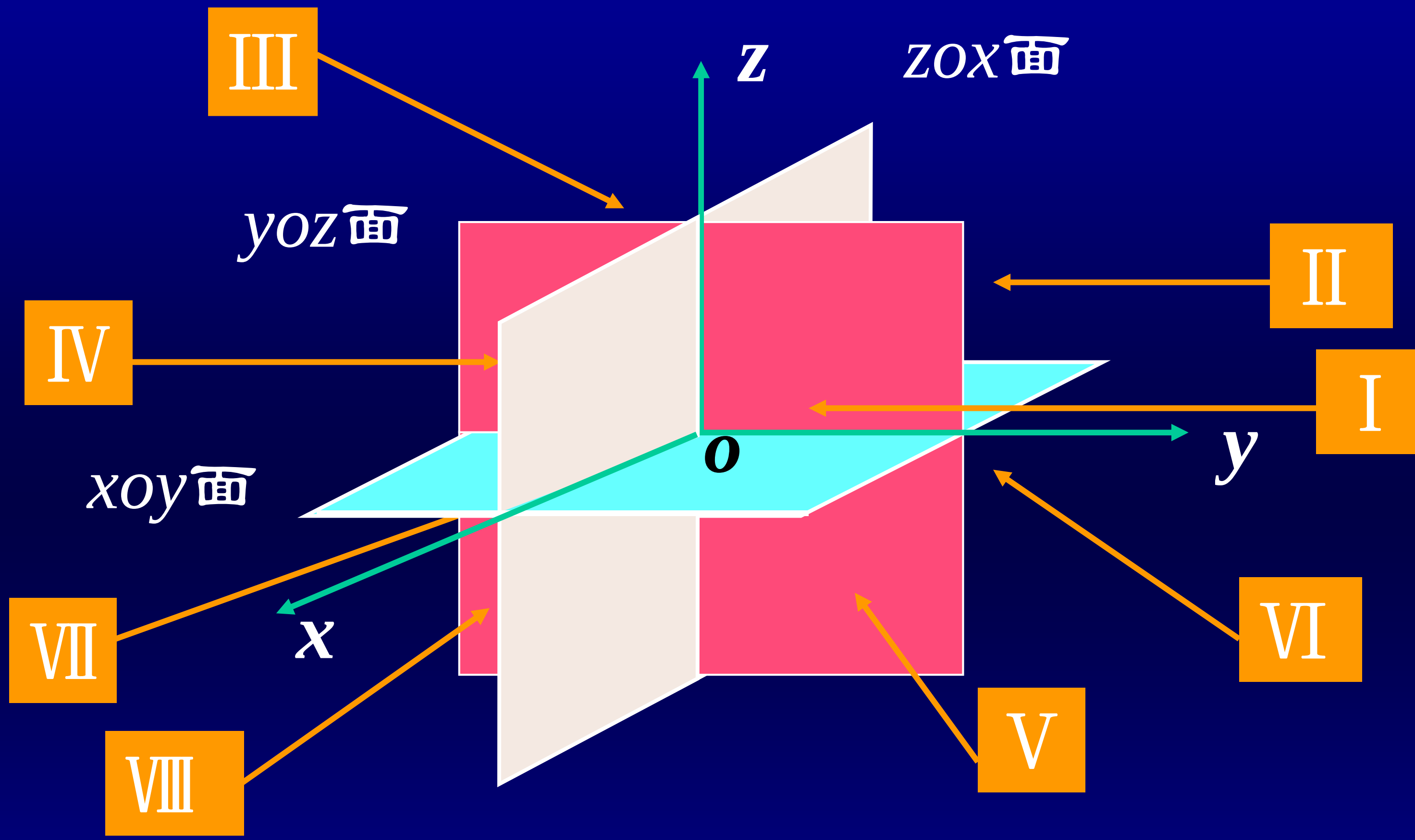




符合右手系.



不符合右手系.



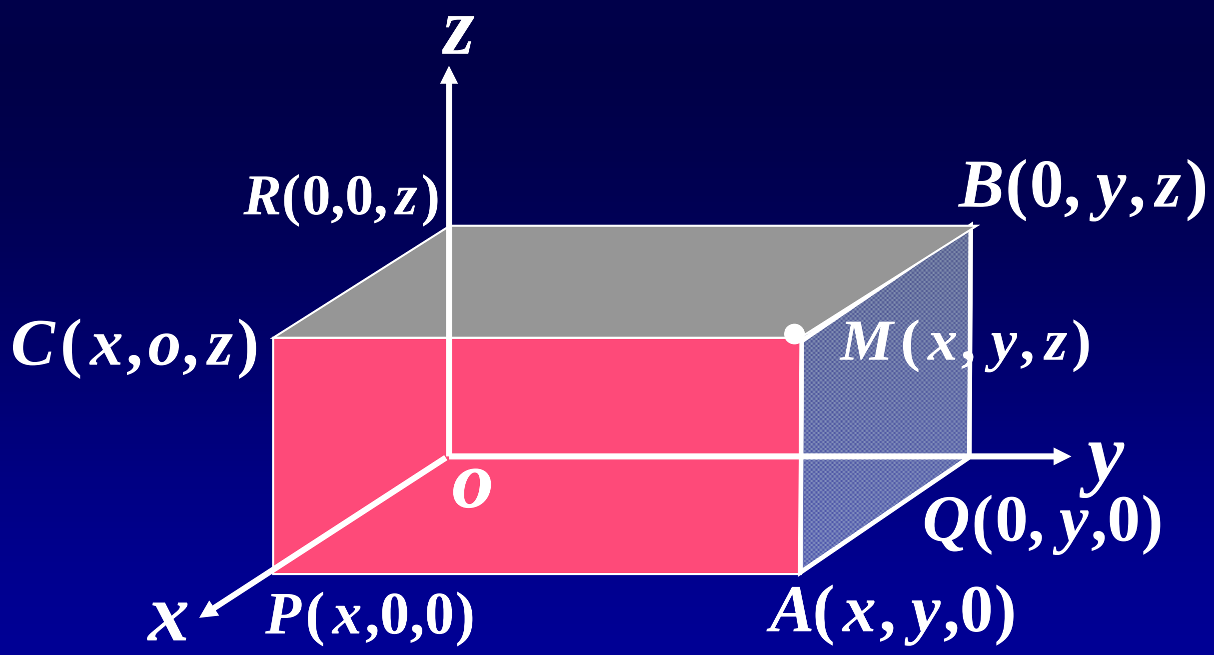
空间直角坐标系共有八个卦限

空间的点M $\xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组(x, y, z)

(x, y, z)称为点 M 的坐标.

特殊点的表示: 坐标轴上的点$P, Q, R,$

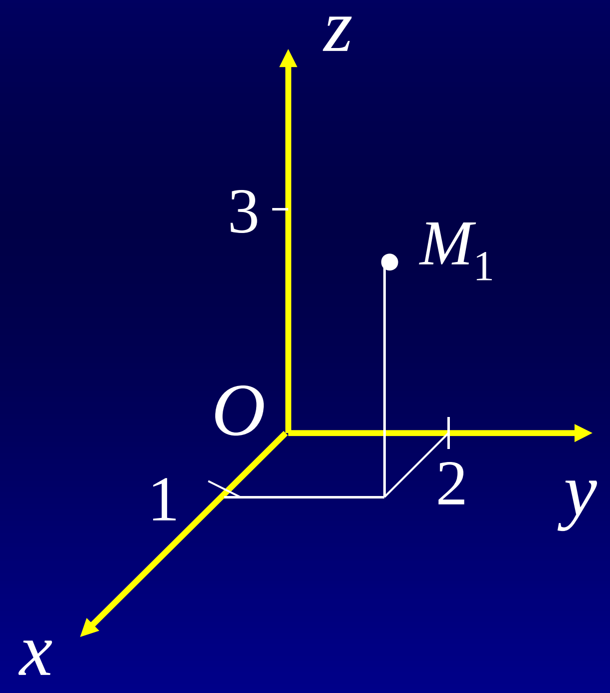
坐标面上的点$A, B, C,$ 原点$O(0,0,0)$

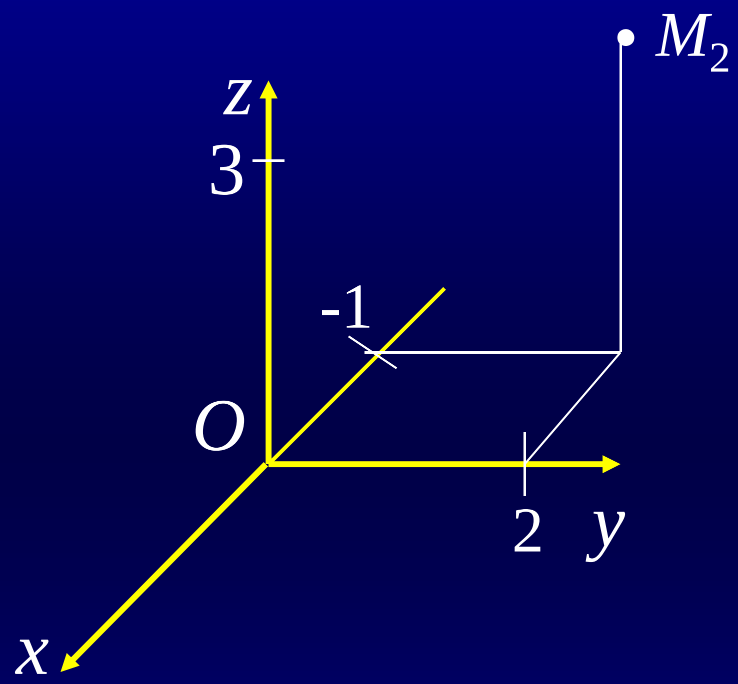


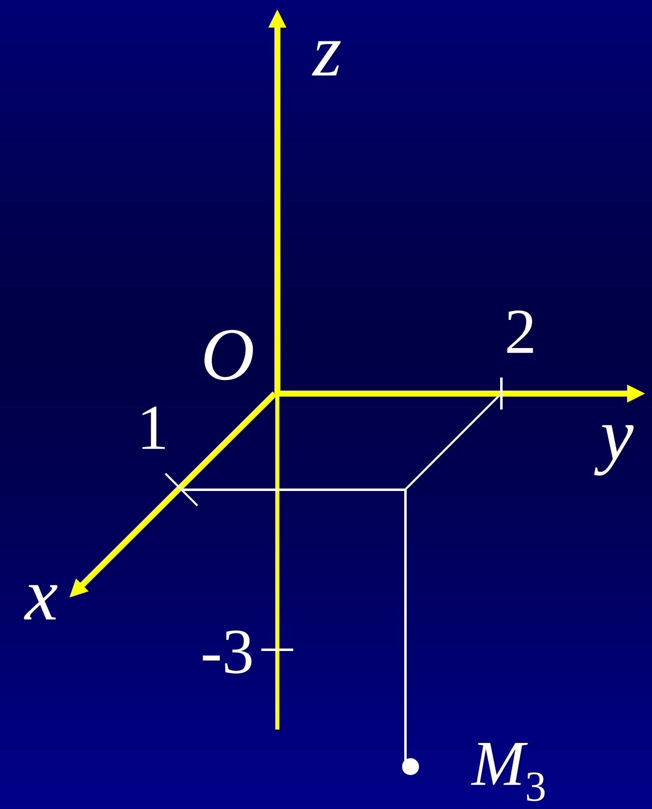
返回

例 在O—xyz坐标系中表示以下三个点：

$$M_1(1, 2, 3),\ M_2(-1, 2, 3),\ M_3(1, 2, -3).$$

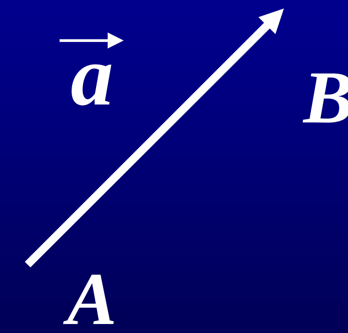






返回

二、 向量的概念



向量： 既有大小又有方向的量.

向量的表示： $\vec{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$

以A为起点，B为终点的有向线段.

向量的模： 向量的大小. $\|\vec{a}\|$ 或 $\|\overrightarrow{AB}\|$

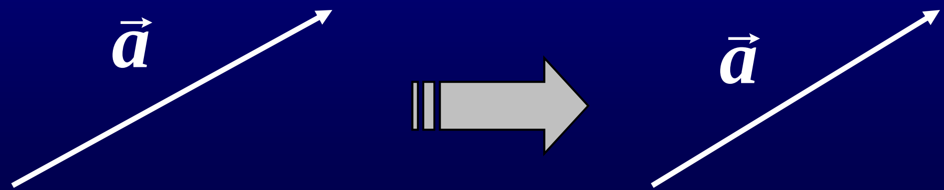
（模又称为长度或范数）.

单位向量： 模为1的向量.

零向量： 模为 0 的向量.$\vec{0}$

返回

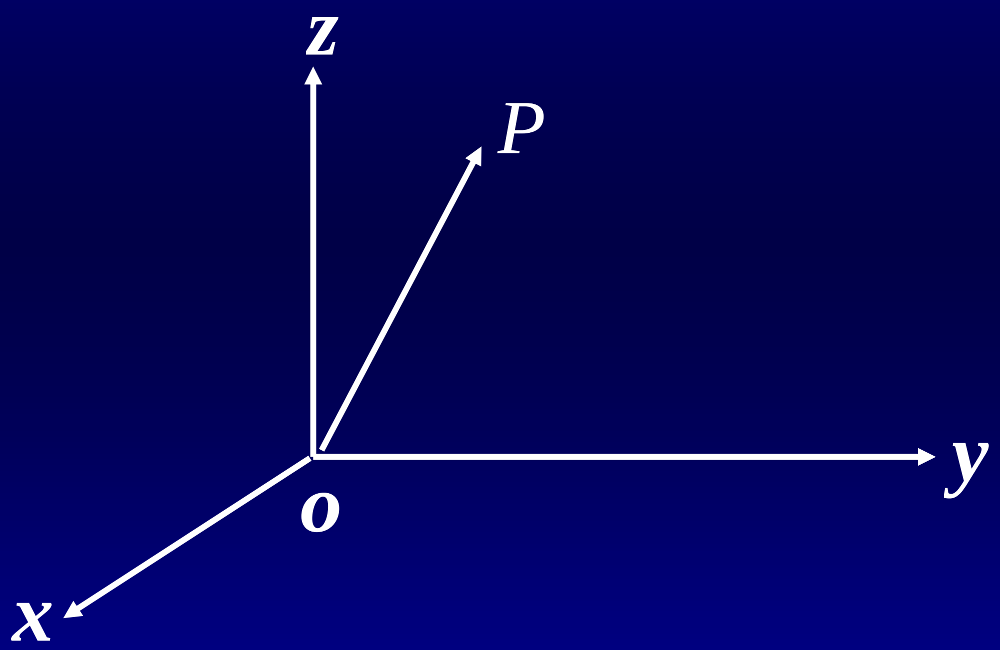
自由向量：不考虑起点位置的向量.



相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

负向量：大小相等但方向相反的向量. $-\vec{a}$

向径： 空间直角坐标系中任一点 P 与原点构成的向量. $\overrightarrow{OP}$



返回

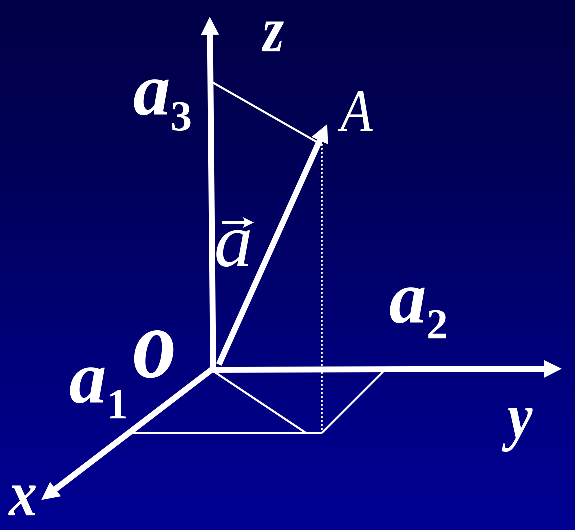
三、向量的线性运算

1. 向量的分量：

把向量 $\vec{a}$ 作平行移动，使其起点与原点重合。

设其终点A的坐标为(a_1, a_2, a_3), 则称a_1, a_2, a_3为向量 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ 的分量或坐标，

记为 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.



返回

2. 向量的线性运算

定义 设 $\alpha=(a_1, a_2, a_3)$, $\beta=(b_1, b_2, b_3)$,

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3),$$

$$k\cdot\alpha=(ka_1, ka_2, ka_3).$$

$\alpha+\beta$ 称为***加法***, $k\cdot\alpha$ 称为***数乘***.

加法与数乘统称为**线性运算**.

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$
$$=(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3).$$

3. 线性运算满足的运算规律

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

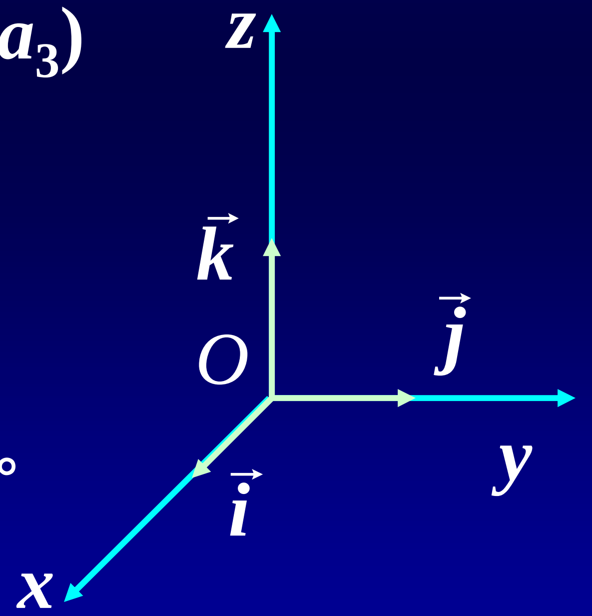
(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

4. 基向量与线性表出

$$\vec{i}=(1,0,0),\ \ \vec{j}=(0,1,0),\ \ \vec{k}=(0,0,1)$$

单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 称为基向量.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3)\\ &= (a_1, 0, 0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)\\ &= a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\end{aligned}$$



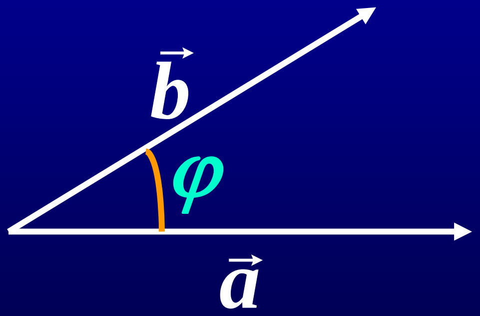
称 $\vec{a}$ 可由 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 线性表出。

$a_1\vec{i}$ 称为向量 $\vec{a}$ 在 x 轴上的 分向量。

返回

四、向量在轴上的投影

1. 空间两向量的夹角的概念：



$\vec{a} \neq \vec{0}, \quad \vec{b} \neq \vec{0},$

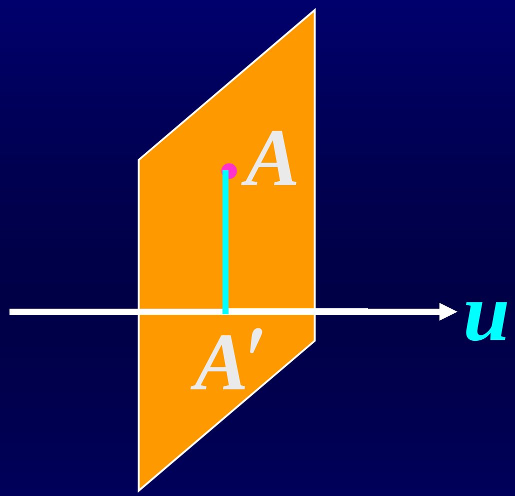
向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角

$$\varphi = <\vec{a}, \vec{b}> = <\vec{b}, \vec{a}> \qquad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

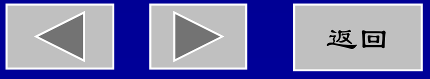
类似地，可定义**向量与一轴**或**空间两轴**的夹角.

特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与 π 之间任意取值.

2. 空间一点在轴上的投影

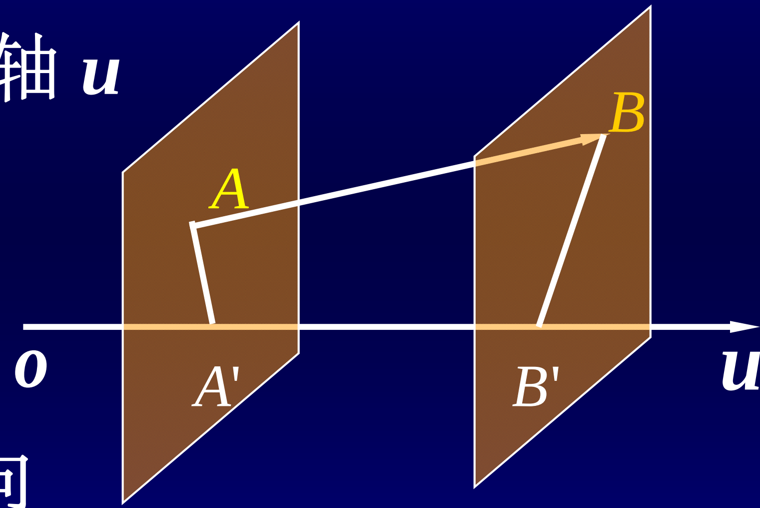


过点 A 作轴 u 的垂直平面，交点 A' 即为点 A 在轴 u 上的投影.



3. 向量在轴上的投影

过空间点***A*,*B***作平面与轴 ***u***垂直，与轴 ***u***相交于***A'***, ***B'***,向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 ***u*** 上的投影定义为



$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = \begin{cases} \|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与}u\text{同向} \\ -\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'}\text{与}u\text{反向} \end{cases}$$

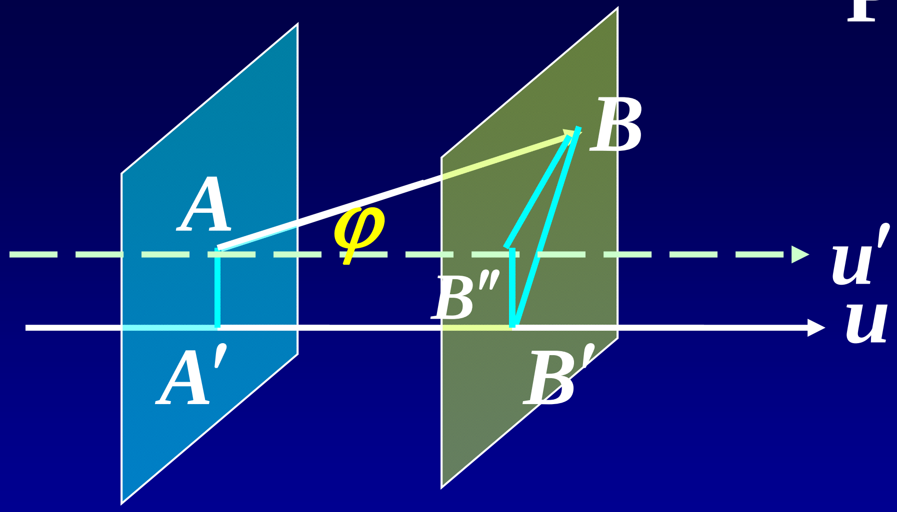
返回

向量在轴上的投影有以下两个性质：

(1) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦：

$$\operatorname{Pr}j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

证



$$\operatorname{Pr}j_u \overrightarrow{AB} = \operatorname{Pr}j_{u'} \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

返回

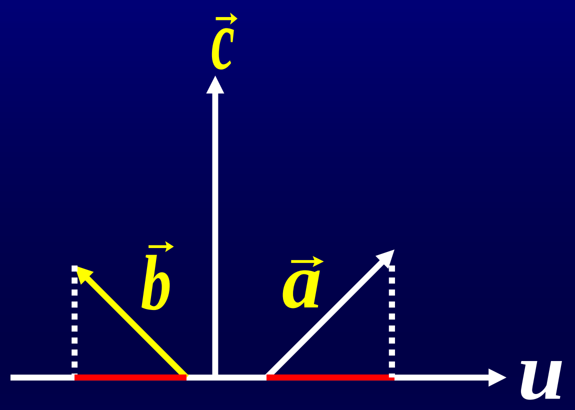
由性质1容易看出：

(1) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$，投影为正；

(2) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$，投影为负；

(3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$，投影为零；

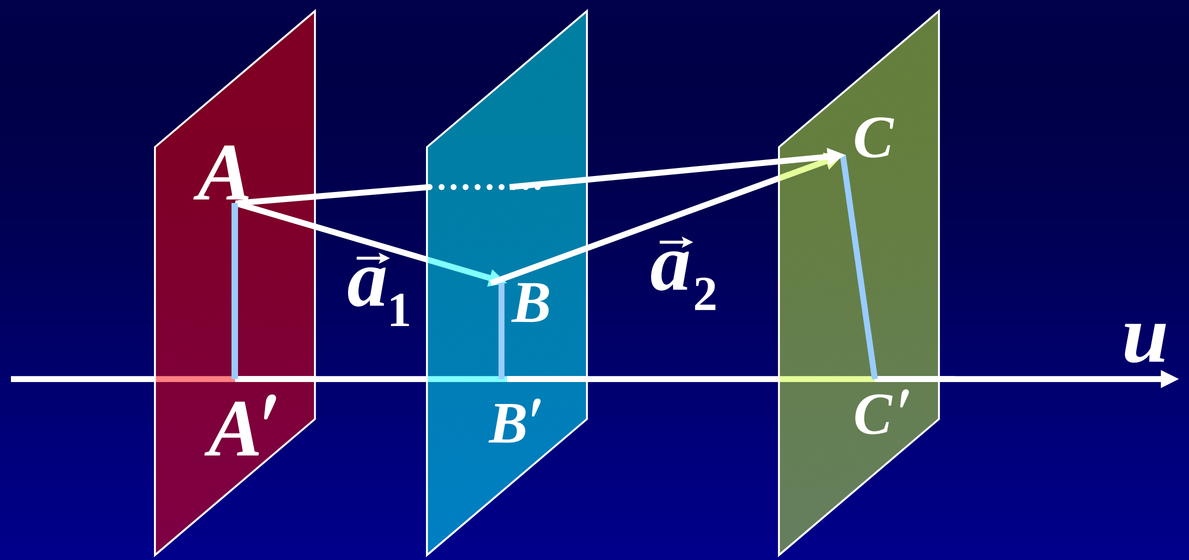
(4) 相等向量在同一轴上投影相等；



（2）

两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和. （可推广到有限多个）

$$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr j_u\vec{a}_1+\Pr j_u\vec{a}_2.$$



返回

向量$\overrightarrow{OA}$的坐标a_1, a_2, a_3分别是 $\overrightarrow{OA}$ 在三个坐标轴上的投影.

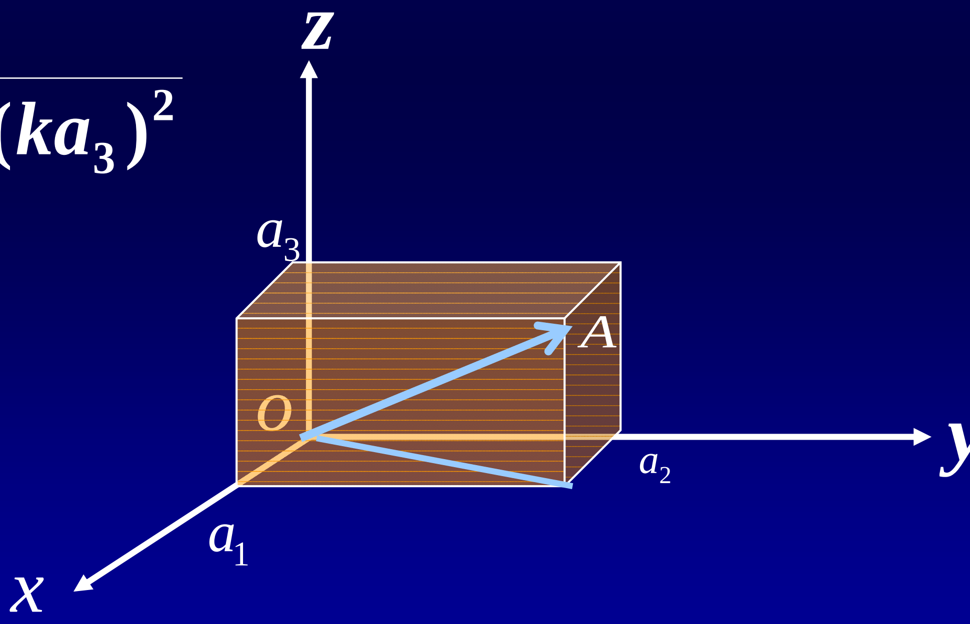
利用勾股定理从图中可得

$$\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\|k\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2}$$

$$= |k| \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$= |k| \, \|\overrightarrow{OA}\|$$



返回

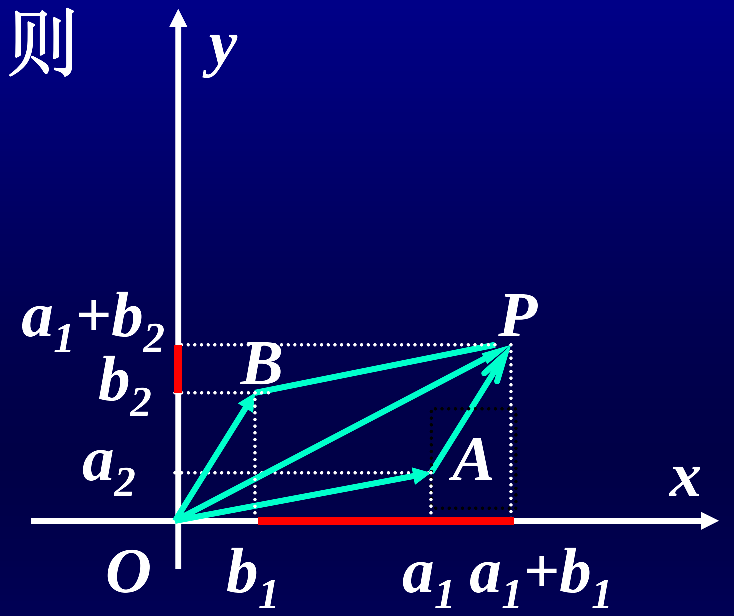
五、线性运算的几何意义

设$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$, 则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2)=\overrightarrow{OP},$$

$$\operatorname{Pr}j_{Ox}\overrightarrow{BP}=a_1+b_1-b_1=a_1$$

$$\operatorname{Pr}j_{Oy}\overrightarrow{BP}=a_2+b_2-b_2=a_2$$

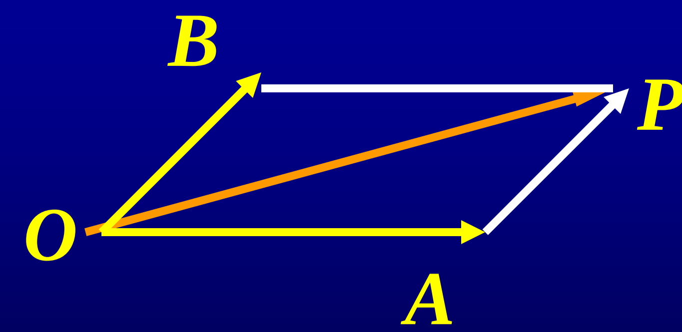


故 $\overrightarrow{BP}$ 经平行移动后可与 $\overrightarrow{OA}$ 重合.

故 $\overrightarrow{BP}\,//\,\overrightarrow{OA}$　　同理: $\overrightarrow{AP}\,//\,\overrightarrow{OB}$

所以，**OAPB**是平行四边形.

1. 平行四边形法则



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP},$$

$\overrightarrow{OP}$ 是以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为边的平行四边形的对角线.

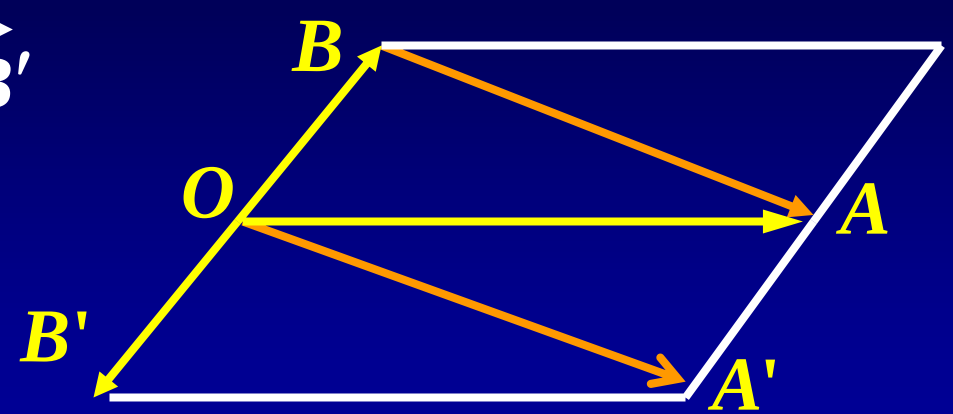
平行四边形法则也可表示为三角形法则：

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AP},\quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}.$$

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}$$

$$=\overrightarrow{OA'}$$

$$=\overrightarrow{BA}$$



返回

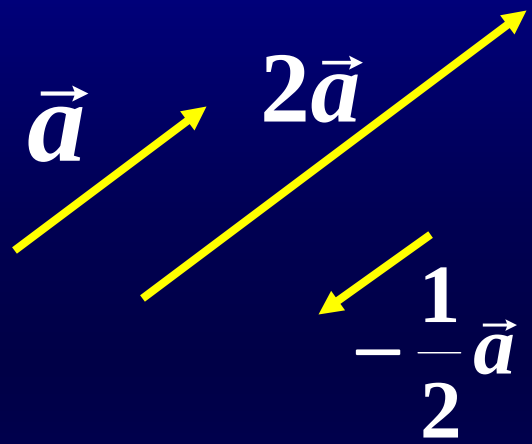
2. 伸缩变换

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

(1) $\lambda > 0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向;

(2) $\lambda = 0$, $\vec{b} = 0$

(3) $\lambda < 0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 反向.



$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) = \lambda \vec{a}$$

$$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}.$$

(若$a_i = 0$,则$b_i = 0$).

返回

例1. 非零向量单位化.

设向量 $\vec{a} \neq 0$,

令 $\vec{e}_a = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$, 则

$$\|\vec{e}_a\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right| \cdot \|\vec{a}\|$$

$$= \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

$\vec{e}_a$ 是与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量.

例2. 证明：三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半.

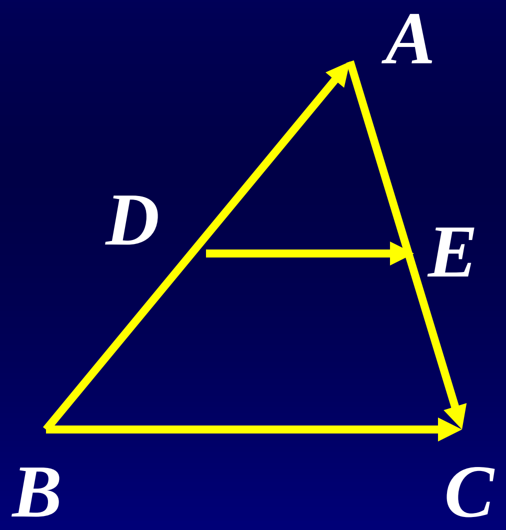
证 设DE是中位线，

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

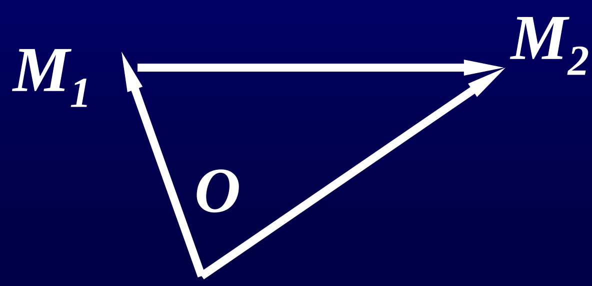


返回

例3. 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

(1) 求 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$;

解.



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

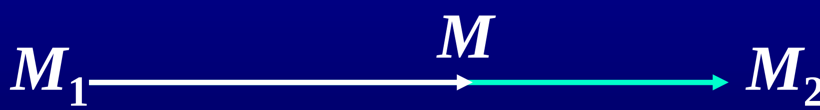
$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

返回

(2) 设M为 $\overrightarrow{M_1M_2}$上一点，$\dfrac{\|\overrightarrow{M_1M}\|}{\|\overrightarrow{MM_2}\|}=\lambda$，求$M$的坐标.

解.



设M的坐标为(x, y, z)，　由$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$得，

$$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\qquad x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

同理，$y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$，$z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

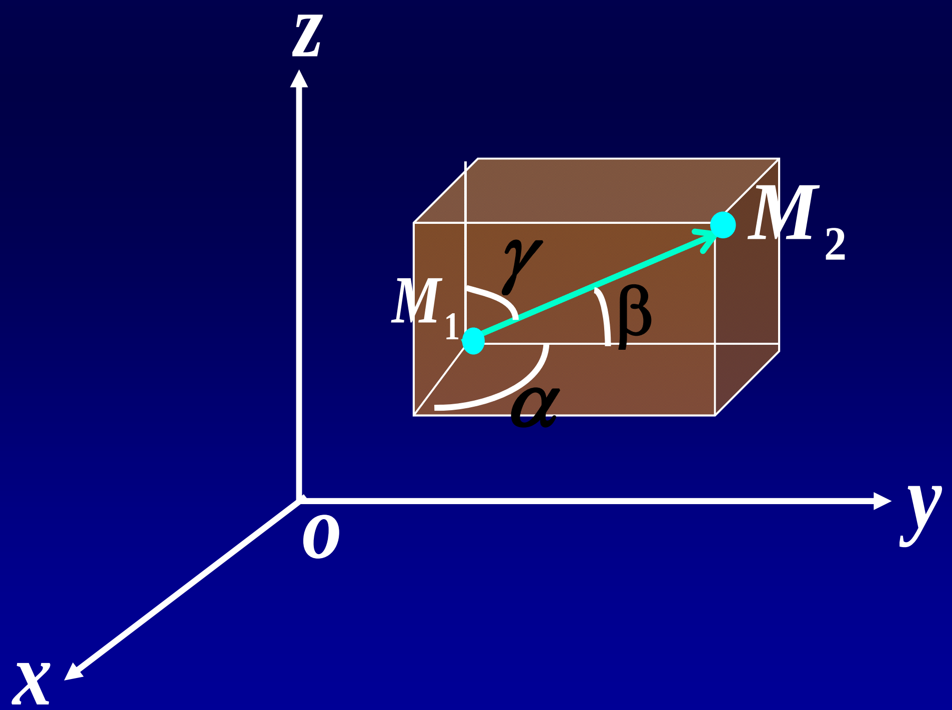
若M为M_1M_2的中点，则M的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

六、向量的模与方向余弦

非零向量 $\vec{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角称为方向角.

$$\alpha = <\vec{a}, \vec{i}>, \beta = <\vec{a}, \vec{j}>, \gamma = <\vec{a}, \vec{k}>,$$

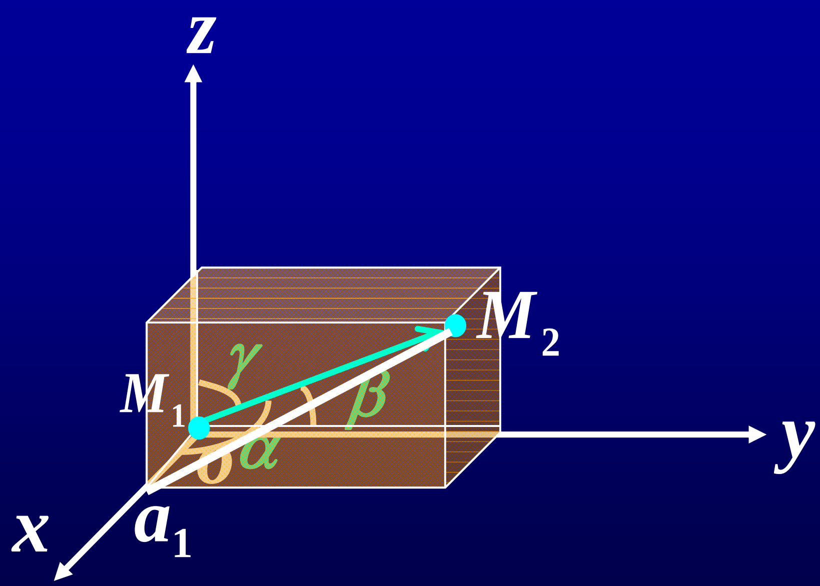


$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$

返回



由图示可知 $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

方向余弦的特征

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

特殊地：单位向量的方向余弦为

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

返回

例4 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知$\|\overrightarrow{P_1P_2}\|=2$，它与 x 轴和y轴的夹角分别为$\frac{\pi}{3}$ 和$\frac{\pi}{4}$ ，如果 P_1 的坐标为 $(1,0,3)$，求P_2 的坐标.

解 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为α、β、γ

$$\alpha=\frac{\pi}{3},\quad \cos\alpha=\frac{1}{2},\qquad \beta=\frac{\pi}{4},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\ \therefore \cos\gamma=\pm\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{3}.$$ 设P_2的坐标为(x, y, z),

$$\cos\alpha = \frac{x-1}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = 2,$$

$$\cos\beta = \frac{y-0}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} \Rightarrow \frac{y-0}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow y = \sqrt{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z-3}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} \Rightarrow \frac{z-3}{2} = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow z = 4, \ z = 2,$$

P_2的坐标为 $(2, \sqrt{2}, 4)$, $(2, \sqrt{2}, 2)$.

例5 设$\vec{m}=3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k}$，$\vec{n}=2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k}$，$\vec{p}=5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}$，求向量$\vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$在 x 轴上的投影及在 y 轴上的分向量.

解 $\because \vec{a}=4\vec{m}+3\vec{n}-\vec{p}$

$$=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})$$

$$-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k},$$

$\therefore$在 x 轴上的投影为$a_1=13$,

在 y 轴上的分向量为$7\vec{j}$.

返回

3.2 向量的乘法

一、 内 积

二、 外 积

三、 混 合 积

返回

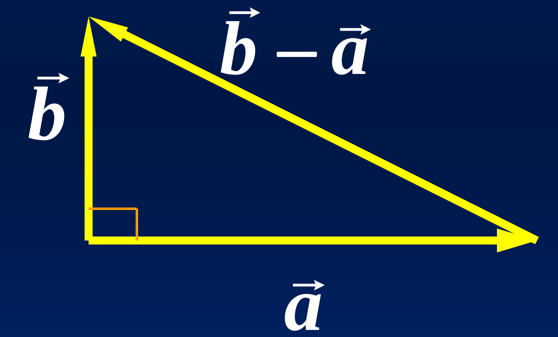
3.2 向量的乘法

一、内积

设非零向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

相互垂直，则由右图可知

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{b} - \vec{a}\|^2$$



即 $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$

$$= (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

由此式可推出

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

返回

定义 设向量

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

称为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积（或数量积）.

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ 记为 $\vec{a}^2$

由定义可知，基向量

$$\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1)$$

的内积为

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

向量的内积具有以下性质：

(1) $\vec{a}^{\,2} = \|\vec{a}\|^2$;

证 $\vec{a}^{\,2} = \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = \|\vec{a}\|^2$.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$;

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

(4) $(\lambda\vec{a}) \cdot (\mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a} \cdot \vec{b}),\ \lambda, \mu \in R$;

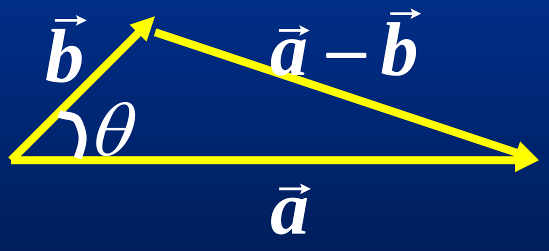
(5) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

性质(2)—(5)很容易用内积定义作出证明.

由余弦定理可知

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2$$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$



$$2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-\|\vec{a}-\vec{b}\|^2$$

$$=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2$$

$$-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2$$

$$=2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta.$$

$$=\|\vec{a}\|\,\mathrm{Pr}\,j_{\vec{a}}\vec{b}=\|\vec{b}\|\,\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}.$$

若$\|\vec{a}\| \neq 0, \|\vec{b}\| \neq 0$,则

$$\cos <\vec{a},\vec{b}> = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$= \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\cdot\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \vec{e}_{\vec{a}}\cdot\vec{e}_{\vec{b}}$$

若$<\vec{a},\vec{b}> = \frac{\pi}{2}$,则称$\vec{a}$与$\vec{b}$正交（或垂直），记为$\vec{a}\perp\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0.}$$

返回

例1 设 $\|\vec{a}\|=11, \|\vec{b}\|=23, \|\vec{a}-\vec{b}\|=30$, 求 $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

解

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=650+2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$

$$=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=650-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$=900.$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b}=-250,$$

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=400, \ \|\vec{a}+\vec{b}\|=20.$$

例2. $\vec{a}=(-2,2,1),\vec{b}=(1,3,-3),\vec{c}=(3,-4,12),$

$\vec{d}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$，求 $\Pr j_{\vec{c}}\vec{d}$.

解 $\vec{d}=(-6-8+12)(1,3,-3)+(-2+6-3)(3,-4,12)$

$=(1,-10,18),$

$$\Pr j_{\vec{c}}\vec{d}=\|\vec{d}\|\cos<\vec{c},\vec{d}>$$

$$=\|\vec{d}\|\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\|\vec{c}\|\|\vec{d}\|}$$

$$=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{\|\vec{c}\|}=\frac{259}{13}.$$

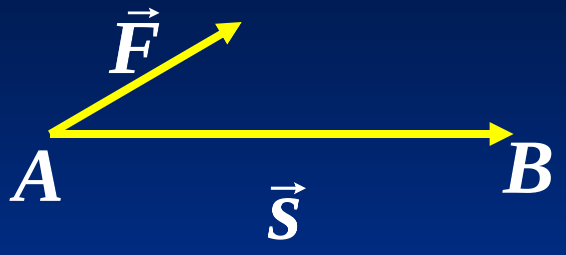
例3. 内积的物理意义

一质点在力 $\vec{F}$ 的作用下从点A移动到B，力$\vec{F}$ 所做的功.

记 $\vec{s} = AB$,则

$$W = \|\vec{F}\| \|\vec{s}\| \cos < \vec{F}, \vec{s} >$$

$$= \vec{F} \cdot \vec{s}.$$



◁ ▷ 返回

二、外积

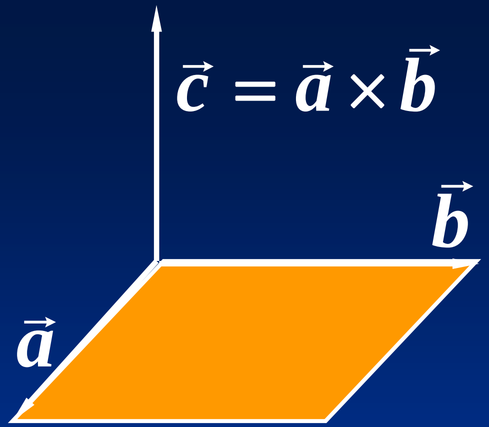
定义 向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的外积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 是一个向量，

(1) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$,

(2) $\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{a}$，$\vec{b}$ 所确定的平面垂直，且

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}\times\vec{b}$ 符合右手系.

外积又称为向量积.



外积的性质

(1) $\vec{a} \perp \vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b} \perp \vec{a}\times\vec{b};$

(2) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\ \vec{0}\times\vec{a}=\vec{0};$

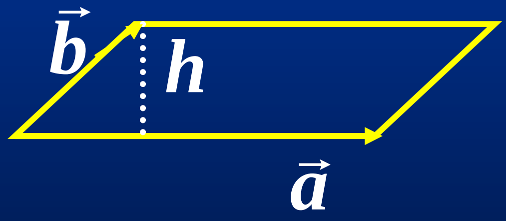
(3) $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0};$

(4) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a};$

(5) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b});$

(6) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}.$

外积的几何意义



$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

$$= \|\vec{a}\|\, h$$

$=$ 以$\vec{a}$，$\vec{b}$为邻边的平行四边形面积.

基向量的外积

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{j}\times\vec{k}=-\vec{i}.$$

返回

利用坐标计算外积

设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

例 1　求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

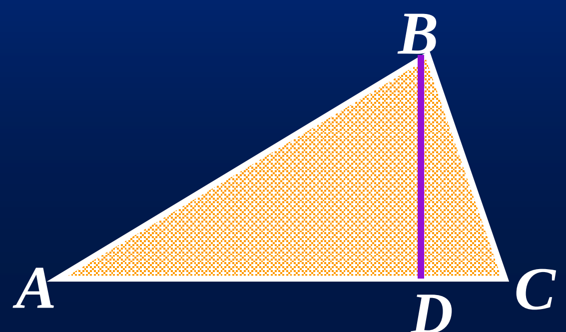
$$\because \|\vec{c}\|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{e}_{\vec{c}}=\pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例 2 在顶点为$A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形中，求AC 边上的高BD.

解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$

$\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$



三角形ABC的面积为

$$S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|BD\|$$

$$\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot5\cdot BD \qquad \therefore BD=5.$$

例3 设单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴夹角相等，B是点$M(1,-3,2)$关于$N(-1,2,1)$的对称点．求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

解 设α,β,γ是$\overrightarrow{OA}$的方向角，则

$$\overrightarrow{OA}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

由 $\alpha=\beta=\gamma$可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1.$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\overrightarrow{OA}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$M(1,-3,2) \qquad N(-1,2,1) \qquad B(x,y,z)$$

设点B的坐标是(x, y, z),则点N是MB的中点，且

$$\frac{x+1}{2}=-1,\ \frac{y-3}{2}=2,\ \frac{z+2}{2}=1.$$

$$x=-3,\ y=7,\ z=0.$$

$$\overrightarrow{OB}=(-3, 7, 0),$$

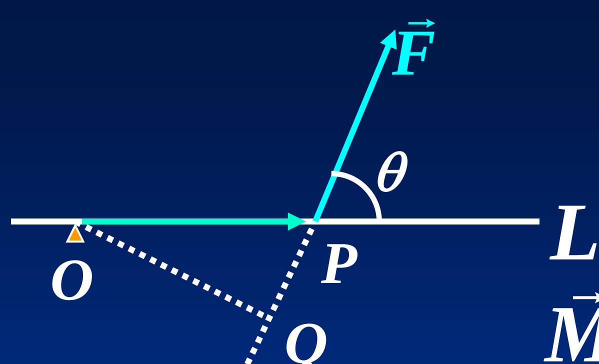
$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-7,-3,10).$$

返回

例4 外积的物理意义

设O为一根杠杆L的支点，有一力$\overline{F}$作用于这杠杆上P点处。力$\overline{F}$与OP的夹角为θ，力$\overline{F}$对支点O的力矩是向量$\overline{M}$,它的模



$$\|\vec{M}\| = |OQ|\,\|\vec{F}\|$$

$$= |\overrightarrow{OP}|\,\|\vec{F}\|\sin\theta$$

$\vec{M}$ 的方向垂直于OP 与$\vec{F}$ 所决定的平面，指向符合右手系.

三、混合积

定义 设已知三个向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 数量$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$称为这三个向量的混合积，记为 $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

设 $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$,

$\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$,

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

这是混合积的坐标表达式

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

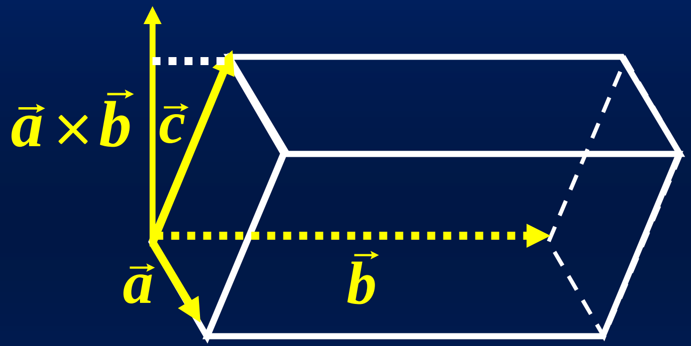
$$=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

返回

混合积的几何意义与性质：

(1) 向量的混合积

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 是这样的一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.



$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\left\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\right\rangle$$

(2) $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

（3）三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0.$

例5　已知$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=2$，

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解　$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\vec{0}\cdot\vec{a}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=4.$$

例 6 已知不在一平面上的四点 $A(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$、$C(x_3, y_3, z_3)$、$D(x_4, y_4, z_4)$，求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 由立体几何知，四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的六分之一.

$$V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$$

$$\because\ \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

返回

$$\because\ \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$$

$$\overrightarrow{AD}=(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1)$$

$$V=\frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}]\right|$$

$$=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

式中正负号的选择和行列式的符号一致.

3.3　平　面

一、　点法式方程

二、　一般式方程

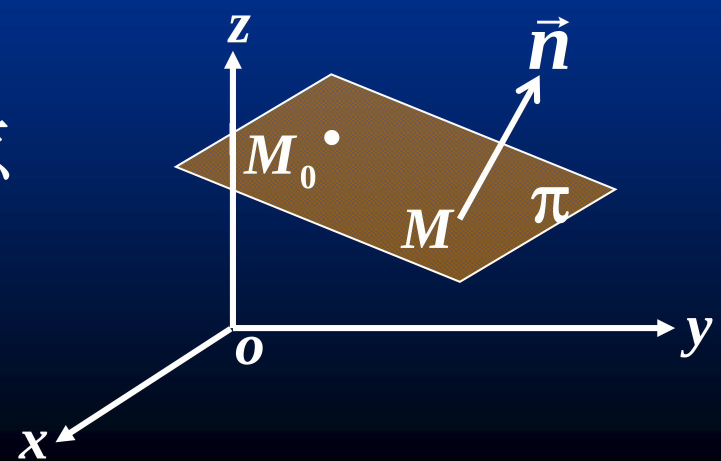
三、　截距式方程

四、　平面与平面的位置关系

返回

3.3 平 面

一、点法式方程



平面π 可由π 上任意一点和垂直于π 的任一向量完全确定. 垂直于π 的任一向量称为π 的法线向量.

法线向量的特征：垂直于平面内的任一向量.

设 $\vec{n}=(A,B,C)$, $M_0(x_0,y_0,z_0)$,

$M(x,y,z)$ 为平面π上的任一点,

必有 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Rightarrow\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

返回

$\because \quad \overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0),$

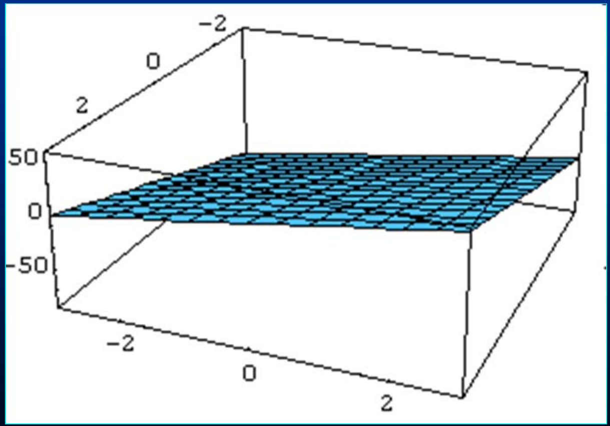
$\therefore \quad A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (1)$

方程(1)称为平面的点法式方程,

其中法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$, 已知点 (x_0, y_0, z_0).

平面上的点都满足方程(1)，不在平面上的点都不满足方程（1），方程(1)称为平面π的方程，平面π 称为方程(1)的图形.

例 1 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB}=\{-3, 4,-6\}$

$\overrightarrow{AC}=\{-2, 3,-1\}$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\{14, 9,-1\}$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得 $14x+9y-z-15=0.$

返回

例 2 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 $\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(3,2,-12)$

取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -12\end{vmatrix}=(10,15,5)$,

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得 $2x+3y+z-6=0.$

二、一般式方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$$Ax+By+Cz+D=0:$$ 平面的一般方程

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$.

平面一般方程的几种特殊情况:

(1) $D=0$, 平面通过坐标原点;

(2) $A=0$, $\begin{cases} D=0, & \text{平面通过 } x \text{ 轴;} \\ D\neq 0, & \text{平面平行于 } x \text{ 轴;} \end{cases}$

$$(0,B,C)\cdot(1,0,0)=0$$

类似地可讨论 $B=0$, $C=0$ 情形.

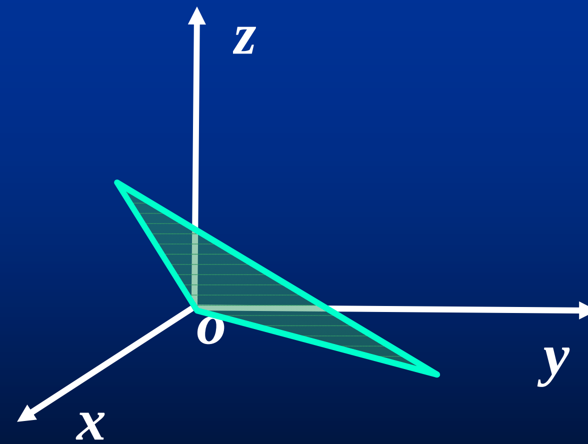
(3) $A=B=0$, 平面平行于 xoy 坐标面;

类似地可讨论 $A=C=0$, $B=C=0$ 情形.

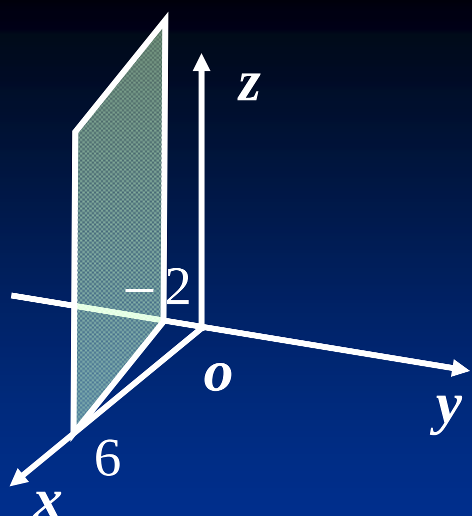
返回

例3 观察下列平面

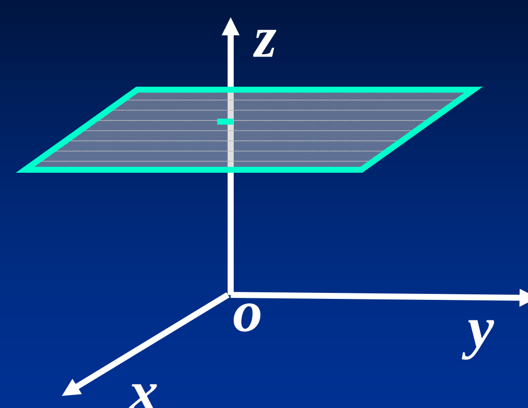
(1) $2x - y - z = 0;$



(2) $-x + 3y + 6 = 0;$



(3) $3z - 7 = 0.$



返回

例 4 设平面过原点及点 $P(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0$,

由平面过原点知 $D=0$,

由平面过点$(6,-3,2)$知 $\boxed{6A-3B+2C=0}$

$\because \vec{n}\perp(4,-1,2)$, $\therefore$ $\boxed{4A-B+2C=0}$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

◀ ▶ 返回

三、 截距式方程

例 5　设平面与x, y, z三轴分别交于$P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中$a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解　设平面为$Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow A = -\frac{D}{a},\quad B = -\frac{D}{b},\quad C = -\frac{D}{c}.$$

将$A=-\frac{D}{a}$, $B=-\frac{D}{b}$, $C=-\frac{D}{c}$,

代入所设方程得

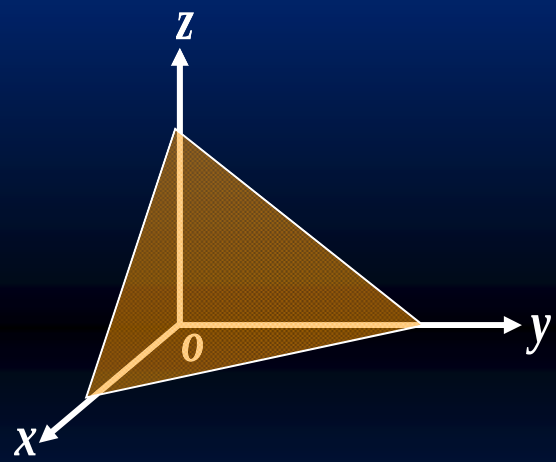
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　y轴上截距　z轴上截距

返回

例 6 求平行于平面$6x+y+6z+5=0$而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解 设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$$\because V=1, \quad \therefore \ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abc=1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$, 令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\Rightarrow t=\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=1,\quad b=6,\quad c=1,$$

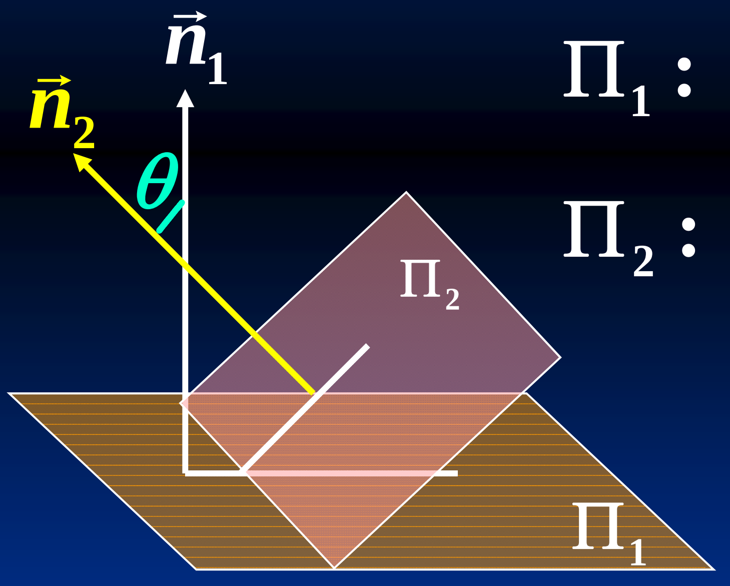
所求平面方程为 $6x+y+6z=6.$

返回

四、平面与平面的位置关系

1. 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）



$$\Pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\Pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

返回

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^{\ 2} + C_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^{\ 2} + C_2^{\ 2}}}$$

两平面夹角余弦公式

2. 两平面垂直与平行的充要条件：

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$

例7 讨论以下各组平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}$$

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$ 两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\vec{n}_1 = (2,-1,1), \quad \vec{n}_2 = (-4,2,-2)$

$$\Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{-2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0) \in \Pi_1 \quad M(1,1,0) \notin \Pi_2$

两平面平行但不重合.

(3) $$\because \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{2},$$ 两平面平行

$\because M(1,1,0) \in \Pi_1 \quad M(1,1,0) \in \Pi_2$

$\therefore$ 两平面重合.

例8 求过点$M_0(-1,3,2)$且与平面$2x - y + 3z - 4 = 0$和$x + 2y + 2z - 1 = 0$都垂直的平面π的方程.

解 两个已知平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 3), \qquad \vec{n}_2 = (1, 2, 2),$$

故平面π的法向量为

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

故平面π的方程为

$$-8(x+1)-(y-3)+5(z-2)=0,$$

即

$$8x+y-5z+15=0.$$

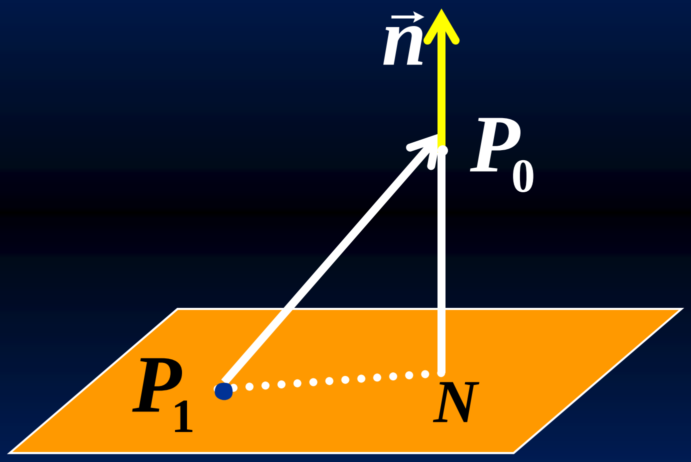
返回

例 9　求点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离.

解　$\forall P_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$



$$d = |\mathrm{Pr}\, j_n \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$= \left| \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}}{\|\vec{n}\|} \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

点到平面距离公式 .

3.4　空间直线

一、点向式方程

二、参数式方程

三、一般式方程

四、直线与直线的位置关系

五、直线与平面的位置关系

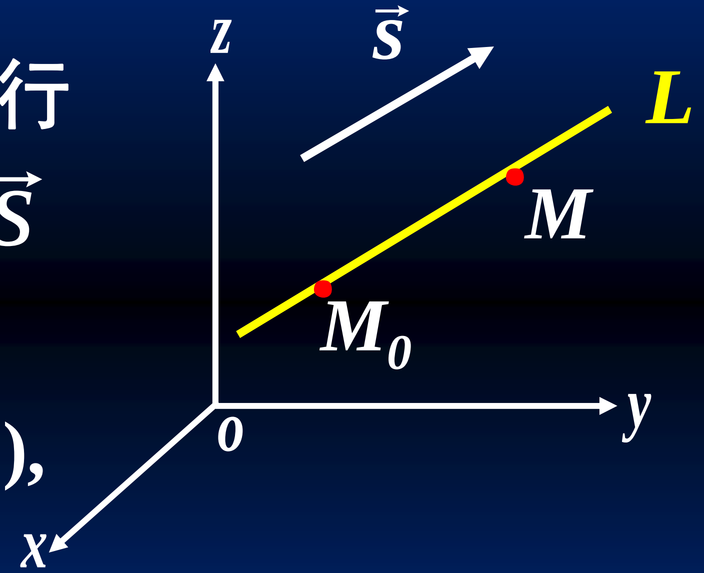
返回

3.4 空间直线

一、点向式方程

方向向量的定义：

如果一非零向量 $\vec{s}$ 平行于一条已知直线L，向量 $\vec{s}$ 称为直线L的**方向向量**.



$M_0(x_0, y_0, z_0)$,　　$M(x, y, z)$,

$\forall\ M \in L$,　　$\overrightarrow{M_0M} // \vec{s}$

$\vec{s} = (m, n, p)$,　　$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

直线的点向式方程

直线的一组方向数

方向向量的余弦称为直线的方向余弦.

◁ ▷ 返回

例1 求过空间两点$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$的直线方程.

解 $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,

$$l: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

例2 $$l: \frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{0} = z - 1.$$

说明:

(1) $\vec{s} = (2, 0, 1)$,

(2) $y - 2 = 0$, 即，l 在平面 $y=2$上.

返回

例 3 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$,

取 $\vec{s}=\overrightarrow{BA}=$（2，0，4）

所求直线方程 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{0}=\dfrac{z-4}{4}$.

二、参数式方程

设直线 l 的方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

上式称为直线l 的参数方程，t 称为参数，不同的 t 对应于直线l 上不同的点.

返回

例 4 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解 先作一过点M且与已知直线垂直的平面Π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$， 交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\ \frac{13}{7}-1,\ -\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\ \frac{6}{7},\ -\frac{24}{7}),$$

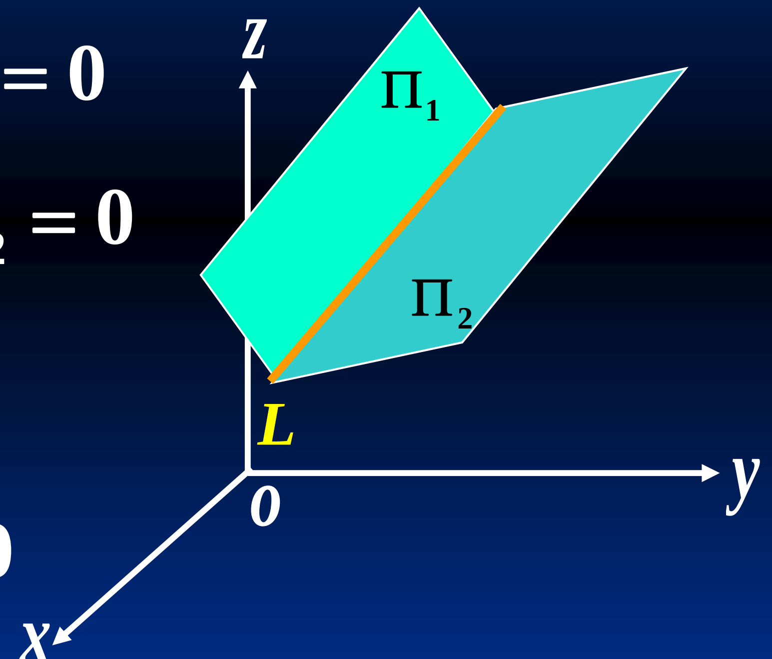
所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

三、一般式方程

空间直线可看成两平面的交线.

$$\Pi_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$\Pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$



$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

空间直线的一般式方程

例5 用点向式方程及参数方程表示直线

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}.$$

解一 在直线上任取一点 $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$

取 $x_0 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y_0 + z_0 + 2 = 0 \\ y_0 - 3z_0 - 6 = 0 \end{cases},$

解得 $y_0 = 0, \quad z_0 = -2$

M_0点的坐标 $(1,0,-2)$,

因所求直线与两平面的法向量都垂直

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=(4,-1,-3),$

点向式方程 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-0}{-1}=\dfrac{z+2}{-3},$

参数方程 $\begin{cases}x=1+4t\\ y=-t\\ z=-2-3t\end{cases}.$

解二 由解法一已得直线上点M_0的坐标(1, 0, -2),

取 x_1 =0, 则

$$\begin{cases} y_1 + z_1 + 1 = 0 \\ -y_1 + 3z_1 + 4 = 0 \end{cases}$$

解得 $y_1 = \frac{1}{4}, z_1 = -\frac{5}{4}$,得点$M_1$的坐标$(0, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4})$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = (-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}),$$

取直线的方向向量为 $\vec{S}$ =(4, -1, -3),

得直线方程为 $$\frac{x-1}{4} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+2}{-3},$$

解三 由直线方程 $\begin{cases} x+y+z+1=0 & (1) \\ 2x-y+3z+4=0 & (2) \end{cases}$

(1)+(2): $3x + 4z + 5 = 0 \Longrightarrow z = \dfrac{-3x-5}{4}$,

(1)×2-(2): $3y - z - 2 = 0 \Longrightarrow z = 3y - 2$

$$\frac{-3x-5}{4} = \frac{3y-2}{1} = \frac{z}{1}, \text{ 即 } \frac{x+\frac{5}{3}}{4} = \frac{y-\frac{2}{3}}{1} = \frac{z}{3}. \qquad (3)$$

方程(3)的方向向量(-4,1,3)与(4,-1,-3)平行，且点 $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ 在解法一、二所确定的直线上，故方程(3)与解法一、二所得的方程表示的为同一直线.

解四（用高斯消元法——行初等变换）

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\therefore\begin{cases} x=1-4y \\ z=-2+3y \end{cases}$$

参数式：$\begin{cases} x=1-4t \\ y=t \\ z=-2-3t \end{cases}$.

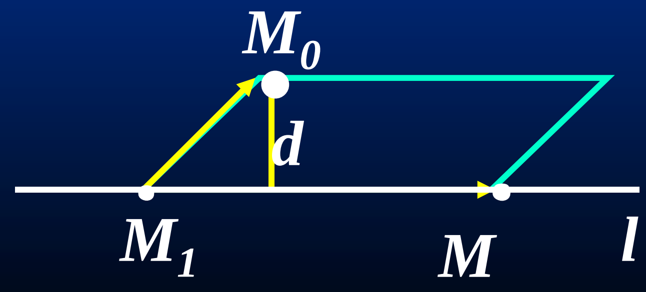
点向式：$\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{3}$.

例6 确定直线l 外一点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到l 的距离.

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$是直线l 上任意一确定的点,

M是l 上另一点，且

$\overrightarrow{M_1M} = \vec{s} = (m, n, p)$,



则直线l 的方程为 $\dfrac{x - x_1}{m} = \dfrac{y - y_1}{n} = \dfrac{z - z_1}{p}$,

如图所示平行四边形面积

$$S = \|\overrightarrow{M_1M_0} \times \overrightarrow{M_1M}\| = \|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\| = d\,\|\vec{s}\|$$

$$d = \frac{\|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\|}{\|\vec{s}\|}.$$

返回

例7 求点$M_0(1, 2, 1)$到直线

$$l:\begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$$

的距离.

解 取 $z=0$, 得 $x=1, y=1$, $M_1(1, -1, 0)\in l$.

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k},$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(0, 3, 1).$$

$$d=\frac{\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\|}{\|\vec{s}\|}=\cdots=\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

四、直线与直线的位置关系

1. 两直线的夹角

两直线L_1与L_2的方向向量 $\vec{s}_1$与$\vec{s}_1$的夹角称（通常指锐角）称为L_1与L_2的夹角，记为$< L_1, L_2 >$.

$$\text{直线 } L_1: \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$\text{直线 } L_2: \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2},$$

$$\cos(L_1, L_2) = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

由此公式可计算两条直线的夹角.

2. 两直线的位置关系：

(1) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0,$

(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2},$

例如，直线 L_1： $\vec{s}_1 = (1, -4, 0),$

直线 L_2： $\vec{s}_2 = (0, 0, 1),$

$\because \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0, \quad \therefore \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2,$ 即 $L_1 \perp L_2$.

例 8 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

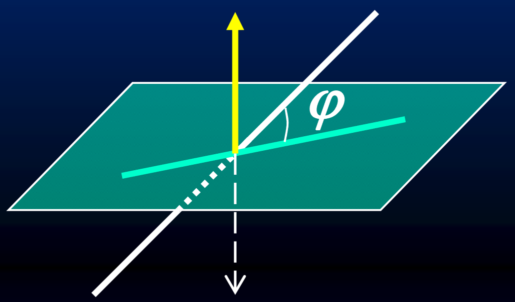
取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

五、直线与平面的位置关系

1、直线与平面的夹角

直线和它在平面上的投影直线的夹角 φ 称为直线与平面的夹角.



$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

$$L: \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \qquad \vec{s} = (m, n, p),$$

$$\Pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \qquad \vec{n} = (A, B, C),$$

$$< \vec{s}, \vec{n} > = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad\qquad < \vec{s}, \vec{n} > = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right|.$$

$$\sin\varphi = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面的夹角公式

2. 直线与平面的位置关系:

(1) $L \perp \Pi \iff \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}.$

(2) $L /\!/ \Pi \iff Am+Bn+Cp = 0.$

返回

例 9 设直线$L: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$，平面$\Pi: x-y+2z=3$，求直线与平面的夹角.

解 $\vec{n}=(1,-1,2)$, $\vec{s}=(2,-1,2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+2\times 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}.$$

$\therefore \quad \varphi=\arcsin\dfrac{7}{3\sqrt{6}}$ 为所求夹角.

例10 直线l 过点$M(2,5,-2)$且与直线

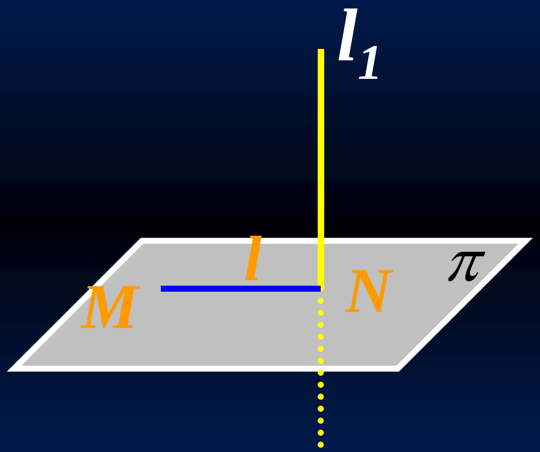
$$l_1:\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z \quad\ =0 \end{cases}$$

垂直相交，求l 的方程.

解 只需求出交点N的坐标即可.

过M作平面π 与l_1 垂直，

π 与l_1的交点即N.



$$l_1 \text{ 的方向向量 } \vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}.$$

过$M(2,5,-2)$且与l垂直的平面

π: $-9(x - 2) + 5(y - 5) + 7(z + 2) = 0.$

$$9x - 5y - 7z - 7 = 0.$$

将直线l_1与π的方程联立：

$$\begin{cases} x - y + 2z - 4 = 0 \\ 3x + 4y + z = 0 \\ 9x - y - 7z - 7 = 0 \end{cases}$$

解得：$x = 1, y = -1, z = 1.$

这就是l_1与π的交点N的坐标$(1, -1, 1)$.

直线l的方向向量

$$\vec{s} = \overrightarrow{MN} = (-1, -6, 3).$$

l的方程

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z+2}{3}.$$

3. 平面束

设直线l 的方程是

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 & (1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 & (2) \end{cases}$$

除方程(2)所表示的平面外，经过直线l 的所有平面都可由下式表示：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (3)$$

经过直线l 的平面全体称为过l 的平面束.

方程(3)称为过直线l 的平面束方程.

例11 求直线

$$l: \frac{x-4}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{3}$$

在平面

$$\pi: \ 2x + 2y + z - 11 = 0$$

上的投影直线.

解 过直线l作一平面π'与π垂直，则

π'与π的交线l'就是l在π上的投影.

◁ ▷ 返回

将l 的方程改写为一般式

$$\begin{cases} x+4y-24=0 \\ 3y+z-17=0 \end{cases}$$

过l 的平面束方程为

$$x + 4y - 24 + \lambda(3y + z - 17) = 0$$

即

$$x + (4 + 3\lambda)y + \lambda z - (24 + 17\lambda) = 0$$

其法向量为

$$\vec{n}' = (1, 4 + 3\lambda, \lambda),$$

由π’⊥π 可得

$$\vec{n}\cdot\vec{n}'=2\cdot1+2(4+3\lambda)+1\cdot\lambda=7\lambda+10=0$$

$$\lambda=-\frac{10}{7},$$

π’的方程为

$$x+(4-\frac{30}{7})y-\frac{10}{7}z-(24-\frac{170}{7})=0,$$

即

$$7x - 2y - 10z + 2 = 0$$

直线*l* 在π 上的投影为

$$l':\begin{cases}7x-2y-10z+2=0\\2x+2y+z-11=0\end{cases}$$

返回

解2 作过l且与π垂直的π'，则l上的点$M(4,5,2)$在π'上.

取 $$\vec{n}' = \vec{s} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7, 2, 10)$$

$$\pi': -7(x-4) + 2(y-5) + 10(z-2) = 0$$

即 $$7x - 2y - 10z + 2 = 0$$

所以l 在π 上的投影直线为 $l': \begin{cases} 7x - 2y - 10z + 2 = 0 \\ 2x + 2y + z - 11 = 0 \end{cases}$

例12 判定$l: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{2}$ 与π: $x + 4y - z - 1 = 0$ 的位置关系．若相交，则求出交点与夹角．

解 $\vec{s} = (1, -2, 2)$, $\vec{n} = (1, 4, -1)$,

$\vec{s} \cdot \vec{n} = -9 \neq 0$, 所以$l$ 与π相交.

$$l: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2t \end{cases} .$$ 代入π, 得 $t = -\dfrac{8}{9}$

所以l 与π交点 $\left(\dfrac{1}{9}, -\dfrac{2}{9}, -\dfrac{16}{9}\right)$

$$\therefore \varphi = \arcsin \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{\|\vec{n}\| \|\vec{s}\|} = \arcsin \frac{|1 - 8 - 2|}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

返回