复 习 课

期中考试时间：11月9号

考试内容：第1-3章

综合成绩构成：

平时30%+期中20%+期末50%

平时构成：

考勤、作业、小测验、小论文

要求

务必掌握基本概念、基本方法、基本理论；
认真阅读教材；独立完成作业。

基本概念

- 随机实验
  - 基本事件
  - 复合事件
- 随机事件
  - 必然事件
  - 不可能事件
- 样本空间 —— 所有基本事件构成的集合
- 事件的关系及运算 ——四种关系和三种运算

概率

- 定义
  - 1^0 $0 \le P(A) \le 1$;
  - 2^0 $P(\Omega) = 1$;
  - 3^0 两两互不相容事件$A_1, \ldots, A_n, \ldots$有 $P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$.
- 性质
  - 1^0 $P(\Phi) = 0$;
  - 2^0 若事件 $A_1, \ldots, A_n$ 两两互不相容, 则$P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$;
  - 3^0 对任意事件A, B(有限)，有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
  - 4^0 对任一事件A， 有 $P(\Omega - A) = 1 - P(A)$;
  - 5^0 设 A, B是两个事件， 且 $B \subset A$， 则

    $$P(A - B) = P(A) - P(B),\ P(B) \le P(A),$$

关系

- 包含
- 相等
- 互斥 $AB=\Phi$
- 互逆 $AB=\Phi$， $A\cup B=\Omega$

运算

- 和 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.
- 积 $A\cap B=\{\omega|\ \omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$
- 差 $A-B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\notin B\}$.

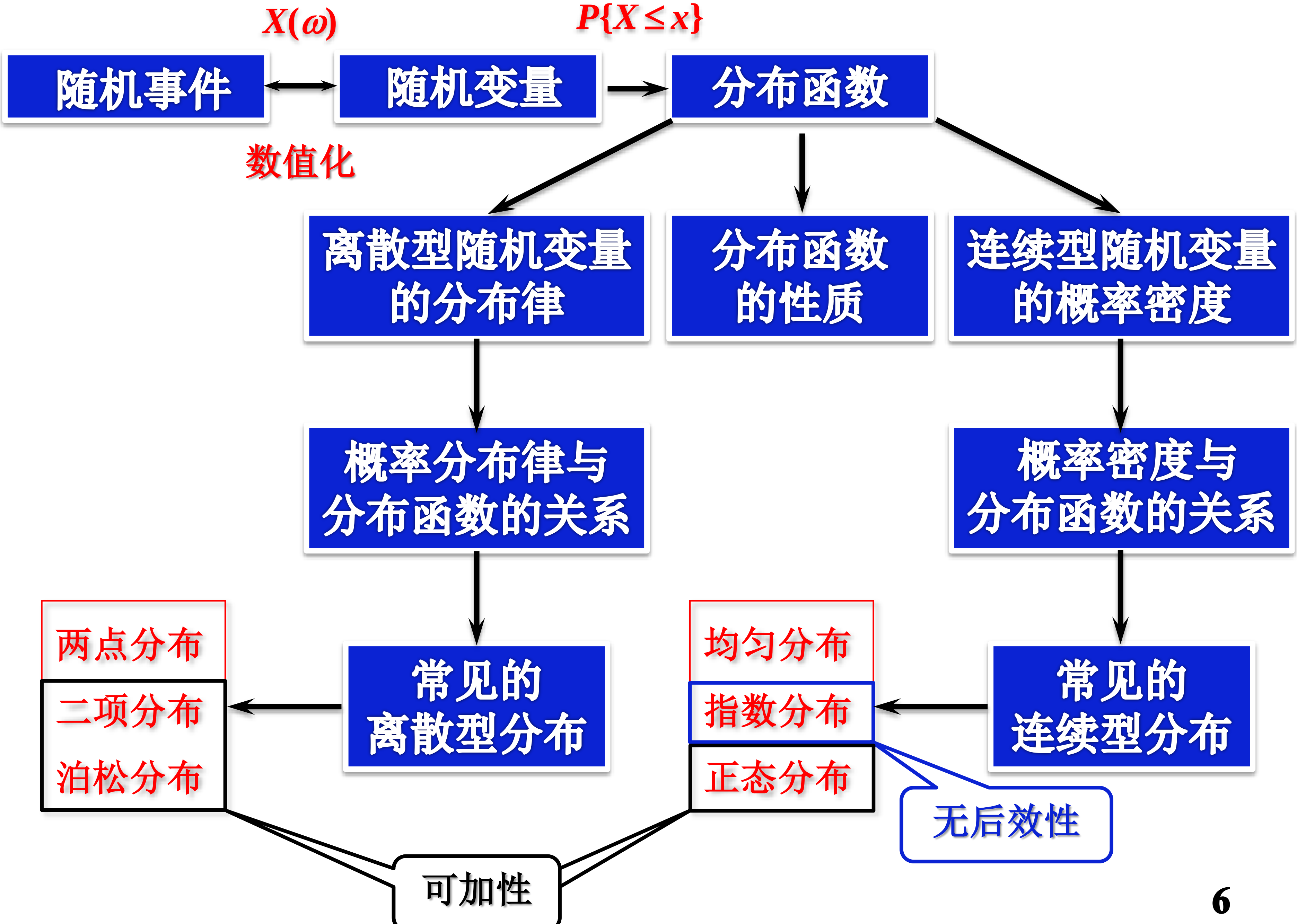
交换律——和、积

结合律——和、积

分配律——积关于和
和关于积
差关于积

对偶律——和、积

- 计算
  - 直接计算
    - 古典概型　$P(A)=\dfrac{A\text{包含的样本点数}}{\Omega\text{中的样本点总数}}$
    - 几何概率　$P(A)=\dfrac{A\text{的度量}}{\Omega\text{的度量}}$
  - 推 算
    - 条件概率　$P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$
    - 利用独立性　$P(AB)=P(A)P(B)$
    - 重要公式
      - 乘法公式
        $$P(AB)=P(A)P(B\mid A),P(A)>0$$
      - 全概率公式
        $$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$$
      - ***Bayesian*公式**
        $$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}$$


$X(\omega)$
$P\{X\le x\}$
随机事件
随机变量
分布函数
数值化
离散型随机变量的分布律
分布函数的性质
连续型随机变量的概率密度
概率分布律与分布函数的关系
概率密度与分布函数的关系
两点分布
二项分布
泊松分布
常见的离散型分布
均匀分布
指数分布
正态分布
常见的连续型分布
无后效性
可加性

(1) $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2), X, Y$相互独立

$\Rightarrow X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2).$

(2) $X \sim B(n_1, p), Y \sim B(n_2, p), X, Y$相互独立

$\Rightarrow X + Y \sim B(n_1 + n_2, p).$

(3)$X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2), Y \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2), X, Y$相互独立

$\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

(4)$X \sim N(\mu_1, {\sigma_1}^2), Y \sim N(\mu_2, {\sigma_2}^2), X, Y$相互独立

$\Rightarrow aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, (a\sigma_1)^2 + (b\sigma_2)^2).$

$$(4.1)\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Y} \triangleq \boldsymbol{a}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{b} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{b},(\boldsymbol{a}\boldsymbol{\sigma})^2).$$

$$(4.2)\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Y} \triangleq -\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(-\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}^2).$$

(7) 若$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\sigma}_1^2;\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\sigma}_2^2;\boldsymbol{\rho})$,那么 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$相互独立 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\rho} = 0$.

(8) 若$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\sigma}_1^2;\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\sigma}_2^2;\boldsymbol{\rho})$ $\Rightarrow \boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\sigma}_1^2),\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\sigma}_2^2)$.

(9) 若$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\sigma}_1^2;\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\sigma}_2^2;\boldsymbol{\rho})$,那么

$\Rightarrow$ 在$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$条件下,

$$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{\sigma}_1}{\boldsymbol{\sigma}_2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_2),\boldsymbol{\sigma}_1^2(1 - \boldsymbol{\rho}^2)\right);$$

$\Rightarrow$ 在$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$条件下,

$$\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\mu}_2 + \boldsymbol{\rho}\frac{\boldsymbol{\sigma}_2}{\boldsymbol{\sigma}_1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_1),\boldsymbol{\sigma}_2^2(1 - \boldsymbol{\rho}^2)\right).$$

(9.1) 若$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) \sim \boldsymbol{N}(0,1;0,1;\boldsymbol{\rho})$,那么

$$\Rightarrow \text{在}\,\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}\text{条件下},\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{y},1-\boldsymbol{\rho}^2\right);$$

$$\Rightarrow \text{在}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}\text{条件下},\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{x},1-\boldsymbol{\rho}^2\right).$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}}\exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right\}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}}\int_{-\infty}^{\boldsymbol{x}}\exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\mu})^2}{2\boldsymbol{\sigma}^2}\right\}\boldsymbol{dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{\pi}}}\int_{-\infty}^{\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}^2}{2}}\boldsymbol{dt}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}^2}{2}}\boldsymbol{dt} = 2\int_{-\infty}^{0}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}^2}{2}}\boldsymbol{dt} = 2\int_{0}^{+\infty}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{t}^2}{2}}\boldsymbol{dt} = \sqrt{2\boldsymbol{\pi}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{t}^2}\boldsymbol{dt} = \sqrt{\boldsymbol{\pi}}$$

$Z = X + Y$ 的分布

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，则

$$F_Z(z) = P\{X+Y \le z\} = \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy}$$

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx}$$

$Z = X/Y$ 的分布

设随机变量(X,Y)的联合概率密度为$f(x,y)$，则

$$F_Z(z) = P\{X/Y \le z\} = \iint\limits_{x/y \le z} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(zy, y)\,dy}$$

1.设A、B、C三个事件两两独立，并且满足

$$P(B|AC)=P(B)$$

问A、B、C是否相互独立？给出理由.

解：因为A、B、C三个事件两两独立，则有

$$P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),$$
$$P(BC)=P(B)\ P(C)$$

同时成立。又因

$$P(ABC)=P(AC)P(B|AC)=P(A)P(C)P(B)$$

满足三个事件相互独立的定义，故A、B、C相互独立.

2.设随机变量X服从正态分布$N(0,1)$,对给定的α $(0<\alpha<1)$,上侧分位数u_α满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$. 若$P\{|X|<x\}=\alpha$，求x的值。

解: $P\{|X|<x\}=\alpha \Rightarrow P\{|X|\geq x\}=1-\alpha$

$$\Rightarrow 1-\alpha=P\{X\geq x\}+P\{X\leq -x\}$$

因X的概率曲线关于y轴对称,故

$$P\{X\geq x\}=P\{X\leq -x\}$$

$$\Rightarrow P\{X\geq x\}=\frac{1-\alpha}{2}\Rightarrow x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$$

3、设两个相互独立的随机变量X~$N(0,1)$,Y~N(1,1)，则

a. $P\{X+Y\le 0\}=0.5$ **b.** $P\{X+Y\le 1\}=0.5$

c. $P\{X-Y\le 0\}=0.5$ **d.** $P\{X-Y\le 1\}=0.5$

$$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{N}(1,2);$$
$$-\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{N}(-1,1);$$
$$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y} \sim \boldsymbol{N}(-1,2)$$

4.设二维随机变量$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的联合概率密度是

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{1}{2\boldsymbol{\pi}}\exp[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)],(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R}^2.$$

请写出$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$的概率密度.

解：由密度函数可知$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$服从二维正态分布

$\boldsymbol{N}(0,1;0,1;0)$,故$\boldsymbol{X}\sim\boldsymbol{N}(0,1)$,$\boldsymbol{Y}\sim\boldsymbol{N}(0,1)$.

因$\boldsymbol{\rho}=0$,所以$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$相互独立,根据正态分布的可加性,$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}\sim\boldsymbol{N}(0,2)$.

故其概率密度函数为

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})=\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{\pi}}}\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{z}^2}{4}},\quad \boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}$$

另解：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(z-x)^2)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2-\frac{z^2}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2}d(x-\frac{z}{2})$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{4}z^2}\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}z^2}. \quad z\in R$$

5.分别讨论当$\boldsymbol{X}$为离散型和连续型随机变量时,如何根据$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$计算$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_0\}, \boldsymbol{x}_0 \in \boldsymbol{R}$.

解：因为$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0-0)$,所以

$(\boldsymbol{i})$若$\boldsymbol{X}$为离散型时，当$\boldsymbol{x}_0$是分布函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的间断点时，$\boldsymbol{X}$取$\boldsymbol{x}_0$值的概率就是$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)$在该点处的跳跃高度;当$\boldsymbol{x}_0$是分布函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的连续点时，$\boldsymbol{X}$取$\boldsymbol{x}_0$值的概率就是0;

$(\boldsymbol{ii})$若$\boldsymbol{X}$为连续型时，当$\boldsymbol{x}_0$是分布函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$的连续点时，$\boldsymbol{X}$取$\boldsymbol{x}_0$值的概率就为0。

6、设$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x})$均为分布函数，试分析下列函数是否为分布函数：

(1)$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x})$

(2)$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x})$

7、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式分别用来解决哪一类问题？

解:1.随机事件组$\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_n$不满足相互独立性时，可借助条件概率用乘法公式计算全部事件同时发生的概率。

2.采用概率分解思想，利用完备事件组分解样本空间$\boldsymbol{\Omega}$的同时将某事件$\boldsymbol{A}$分解为互不相容的各部分,借助条件概率用全概率公式计算事件$\boldsymbol{A}$的概率。即以化整为零思想计算事前（先验）概率。

3.贝叶斯公式是应用乘法公式及全概率公式计算事后（后验）概率。

简答题：如每章习题后面的思考题。

无标准答案，只需答出关键知识点即可，考查对概念、知识点的理解和掌握情况。

三、已知随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1+x}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

请根据该分布函数的特点分析判断X是离散型随机变量吗？是连续型随机变量吗？

解：不是连续型随机变量,因为$F(x)$在$x=0$处不连续；

也非离散型随机变量,因为对$\forall a,b\in(0,1)$,且$a<b$有

$$P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)=\frac{1+b}{2}-\frac{1+a}{2}=\frac{b-a}{2}>0$$

即X可取$(0,1)$中任意值。

三、独立地重复进行某项试验，成功就停止，每次成功的概率都是1 / 2，若至多进行3次试验，用$\boldsymbol{X}$表示试验次数，试写出$\boldsymbol{X}$的分布律和分布函数。

四、若$\boldsymbol{A}$是多重贝努里试验中关注的随机事件，
请考虑事件$\boldsymbol{A}$首次发生时的试验次数$\boldsymbol{Y}$分布律.

五、$\boldsymbol{n}$重贝努里试验有什么特征？若$\boldsymbol{A}$是$\boldsymbol{n}$重贝努里试验中关注的随机事件，请考虑事件$\boldsymbol{A}$首次发生时的试验次数$\boldsymbol{Y}$分布律.

解:n重贝努里试验具有独立性与可重复性，并仅关心两个结果：A与$\bar{A}$。设A_i表示第i次试验事A发生，则$P(A_i)=p$。

$$P\{Y=k\}$$
$$=P\{\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1}A_k\}$$
$$=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_{k-1})P(A_k)$$
$$=(1-p)^{k-1}p,\qquad k=1,2,\cdots,n-1.$$
$$P\{Y=n\}$$
$$=P[\{\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}A_n\}\cup\{\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n\}]$$
$$=(1-p)^{n-1}p+(1-p)^n=(1-p)^{n-1}.$$

或$P\{Y=n\}=1-\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^k p=(1-p)^{n-1}.$

例8、某地区对50~60岁的男性公民进行调查，结果发现，肺癌病人和无肺癌者的吸烟比例差不多，两者分别为99.7%和95.8%. 于是有人说：吸烟对于是否患肺癌没有太大的影响，该如何看待这个问题呢? 若假定人群中肺癌的发病率约为0.01%, 对你的观点做出解释.

解：考虑吸烟的条件下患肺癌的可能性（即吸烟人群中的肺癌发病率）有多大. 利用Bayes公式计算概率 。设

$\boldsymbol{A}=\{$抽检到肺癌病人$\}$ $\boldsymbol{B}=\{$抽检到吸烟者$\}$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})=0.01\%$ $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\big|\boldsymbol{A})=99.7\%$

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\big|\bar{\boldsymbol{A}})=95.8\%$

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\big|\boldsymbol{B})=\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{AB})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})}=\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\big|\boldsymbol{A})}{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\big|\boldsymbol{A})+\boldsymbol{P}(\bar{\boldsymbol{A}})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\big|\bar{\boldsymbol{A}})}$$

$$=\frac{0.01\%\times 99.7\%}{0.01\%\times 99.7\%+(0.99\%)\times 95.8\%}\approx 1.04\times 10^{-4}$$

在吸烟的条件下患肺癌的可能性非常小(只有0.01%)，吸烟的危害性似乎不足挂齿！但是另一方面，求得不吸烟的条件下患肺癌的概率仅为

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)P(\bar{B}|A)}{P(A)P(\bar{B}|A)+P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})}$$

$$=\frac{0.01\%\times(1-99.7\%)}{0.01\%\times(1-99.7\%)+(1-0.01\%)\times(1-95.8\%)}$$

$$\approx 7.14\times 10^{-6}$$

吸烟患肺癌的可能性是不吸烟的14.6倍. 可以得出结论：还是不吸烟的好！

三、已知随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \dfrac{4}{15}, & -1\le x<1;\\ \dfrac{11}{15}, & 1\le x<2;\\ 1, & 2\le x.\end{cases}$$

(1)写出X的分布律;

(2)计算概率 $P\{X=1.5\}$, $P\{X\ge 1.5\}$

(3)计算条件概率 $P\{X\le 1.5\,|\,X\ge 0.5\}$

解：(1)根据分布函数的间断点知，$\boldsymbol{X}$的可能取值为 $-1,1,2.$

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=-1\}=\boldsymbol{F}(-1)-\boldsymbol{F}(-1-0)=\frac{4}{15}$$

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=1\}=\boldsymbol{F}(1)-\boldsymbol{F}(1-0)=\frac{7}{15}$$

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=2\}=\boldsymbol{F}(2)-\boldsymbol{F}(2-0)=\frac{4}{15}$$

(2)$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=1.5\}=0$

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}\geq 1.5\}=1-\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}<1.5\}=1-\boldsymbol{F}(1.5)=\frac{4}{15}$$

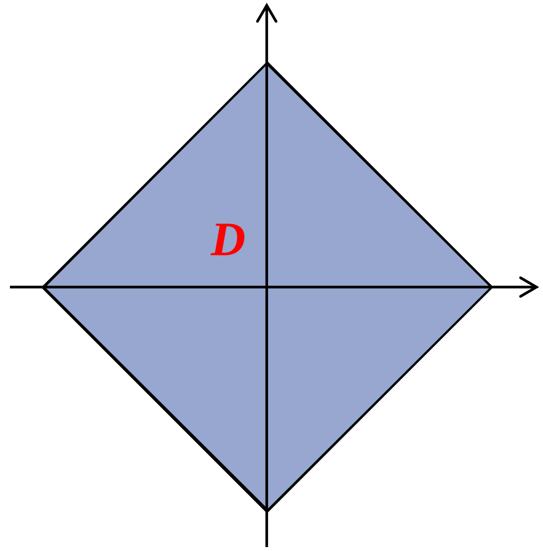
(3)$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}\leq 1.5\,\big|\,\boldsymbol{X}\geq 0.5\}=\dfrac{\boldsymbol{P}\{0.5\leq \boldsymbol{X}\leq 1.5\}}{\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}\geq 0.5\}}$

$$=\frac{\boldsymbol{F}(1.5)-\boldsymbol{F}(0.5)}{1-\boldsymbol{F}(0.5)}=\frac{7}{11}$$

六、随机变量(X,Y)在D上服从均匀分布，其中

$$D=\{(x,y):\left|x+y\right|\le 1,\left|x-y\right|\le 1\},$$

讨论X与Y是否相互独立;讨论$f_{Y|X}(y|x)$的存在区间;并在$X=0$的条件下求$f_{Y|X}(y|0)$.



解：(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/2, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\displaystyle\int_{-x-1}^{x+1}\frac{1}{2}dy=1+x, & -1\le x<0;\\ \displaystyle\int_{x-1}^{-x+1}\frac{1}{2}dy=1-x, & 0\le x\le 1;\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}0dy=0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}1+y, & -1\le y<0;\\ 1-y, & 0\le y\le 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D}$时,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{2} \neq \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f_Y}(\boldsymbol{y})$,故$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$不相互独立.

当$\boldsymbol{x} \in (-1,1)$时,$\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x}) > 0$,$\boldsymbol{f_{Y|X}}(\boldsymbol{y}\big|\boldsymbol{x}) = \dfrac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})}$有定义(有意义)。

故

$$\boldsymbol{f_{Y|X}}(\boldsymbol{y}\big|0) = \frac{\boldsymbol{f}(0,\boldsymbol{y})}{\boldsymbol{f_X}(0)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \big|\boldsymbol{y}\big| \leq 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

六、设(X,Y)是二维连续型随机变量，已知X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

对任意$x\in(0,1)$,在$X=x$的条件下,$Y\sim U(0,x)$,求(X,Y)的联合概率密度$f(x,y)$以及关于Y的边缘概率密度.

分析

$$\boldsymbol{f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y\mid x)}$$

$$\boldsymbol{f_{Y|X}(y\mid x)}=\begin{cases}\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}, & \boldsymbol{0<y<x;}\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx}$$

例2 某射手进行射击，击中目标两次则停止射击, 每次的命中率为p ($0<p<1$), 令X 表示第一次命中目标时的射击次数，令Y表示第二次命中目标时的射击次数，求条件分布律

$$P\{X=i \mid Y=j\}.$$

解：由题意得

$$P\{X=i,Y=j\}=p^2(1-p)^{j-2},$$
$$1<i\le j; j=2,3,\cdots$$

$$P\{Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}P\{X=i,Y=j\}=\sum_{i=1}^{j-1}p^2(1-p)^{j-2}$$

$$=(j-1)p^2(1-p)^{j-2},\qquad j=2,3,\cdots;$$

所以当$j=2,3,\cdots$时,条件分布律存在,且有

$$P\{X=i\big|Y=j\}=P\{X=i,Y=j\}\,/\,P\{Y=j\}$$

$$=p^2(1-p)^{j-2}\,/\left((j-1)p^2(1-p)^{j-2}\right)=\frac{1}{j-1}.$$

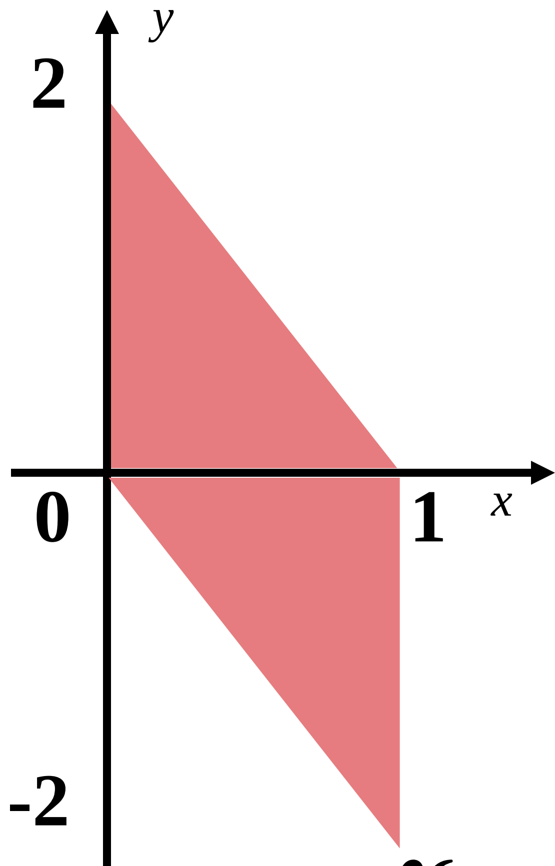
$i=1,2,\cdots,j-1.$

例3: 随机变量(X,Y)在D上服从均匀分布,

$$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le x+\frac{y}{2}\le 1\}$$

试求$f_{X|Y}(x\mid y)$和$f_{Y|X}(y\mid x)$.

解: $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & (x,y)\notin D.\end{cases}$$

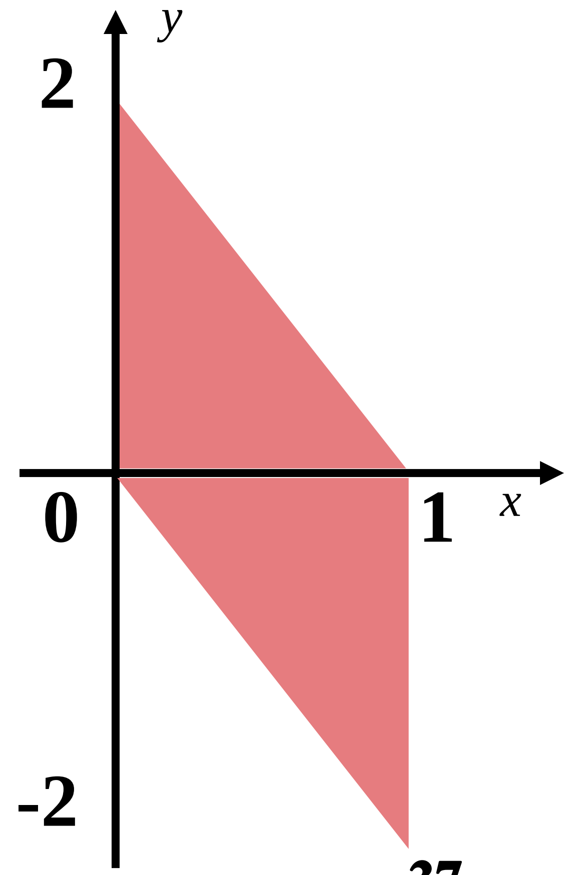


$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-2x}^{2(1-x)}\frac{1}{2}dy=1, & 0\le x\le 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{y}{2}}^{1} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2} + \frac{y}{4}, & -2 < y < 0; \\ \displaystyle\int_{0}^{1-\frac{y}{2}} \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2} - \frac{y}{4}, & 0 \le y < 2; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

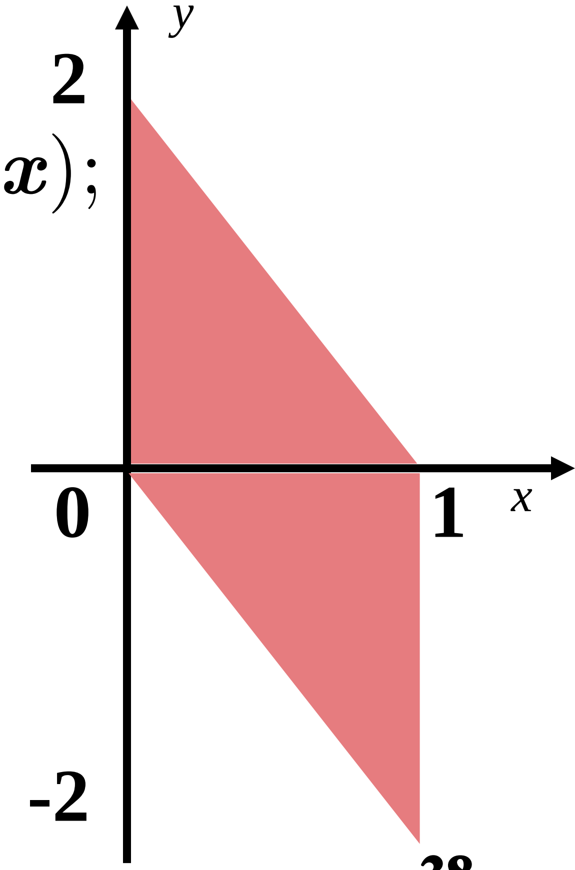


所以当$0 \le x \le 1$时, $f_X(x) > 0$, 故$f_{Y|X}(y|x)$有意义,

因此

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

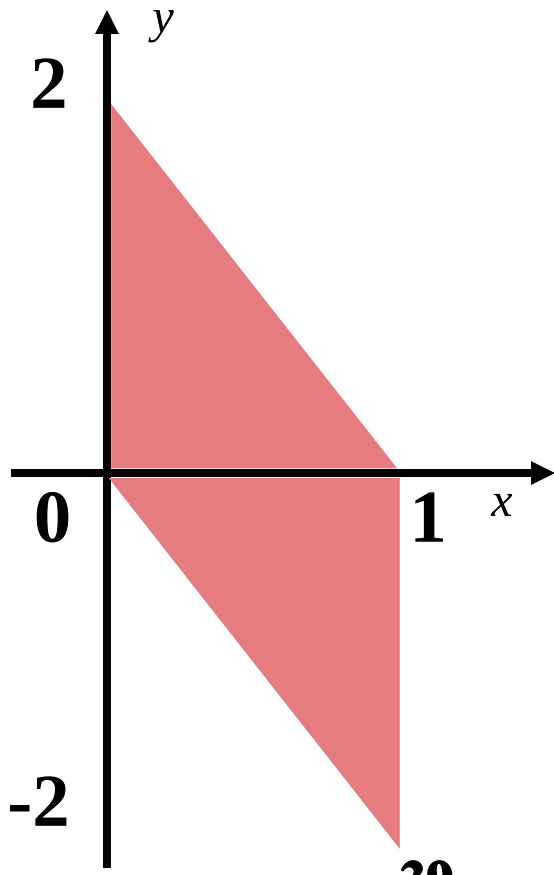
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & -2x \le y \le 2(1-x); \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



所以当 $-2<y<0$ 时, $f_Y(y)>0$, 故 $f_{X|Y}(x|y)$ 有意义, 因此

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{1+\frac{y}{2}}, & -\dfrac{y}{2}\le x\le 1;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

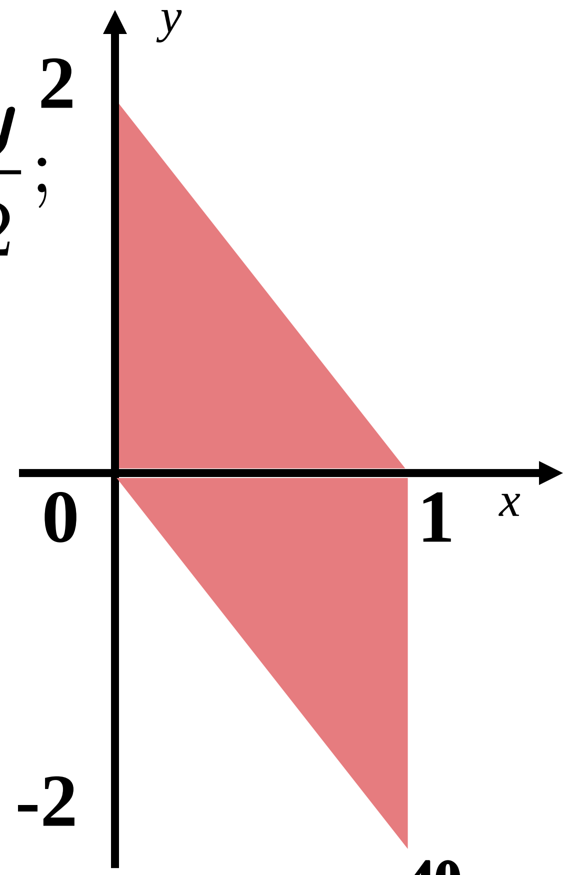


当$0 \le y < 2$时，$f_Y(y) > 0$，故$f_{X|Y}(x|y)$也有意义，

因此

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

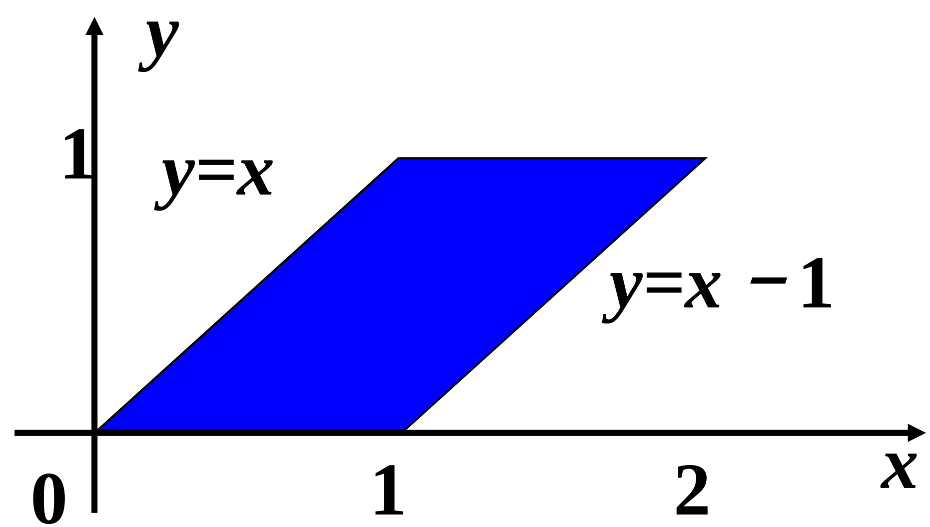
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\dfrac{y}{2}}, & 0 \le x \le 1-\dfrac{y}{2}; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$



例4 设（X, Y）的联合概率密度为

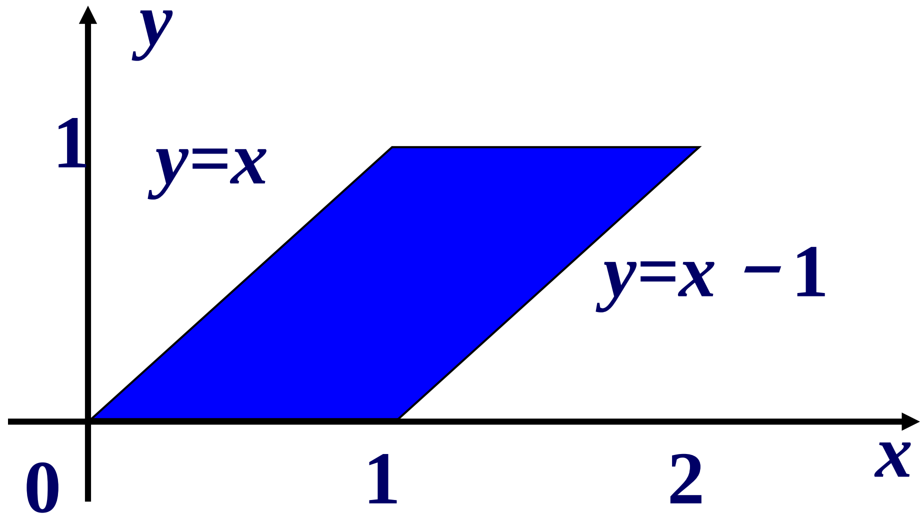
$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 2, \max(0,x-1)\le y\le \min(1,x);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求$f_{Y|X}(y|x)$, 并计算概率$P\{0<Y<0.5|X=0.5\}$ 和$P\{0<Y<0.5|X=1.2\}$.



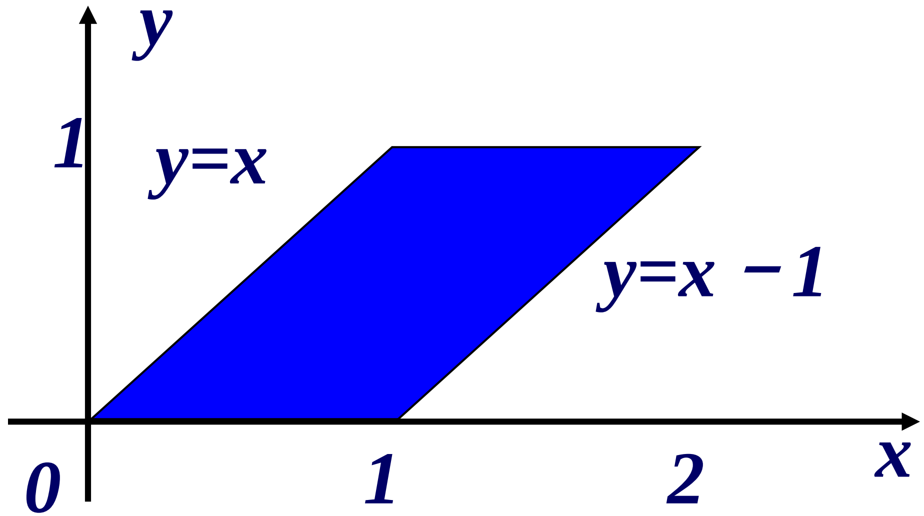
$$\boldsymbol{f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}$$

$$= \begin{cases} \int_0^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{dy = x}, & 0 \le \boldsymbol{x} \le 1; \\ \int_{\boldsymbol{x}-1}^{1} \boldsymbol{dy} = 2 - \boldsymbol{x}, & 1 < \boldsymbol{x} \le 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$



当$0 < x \le 1$时，$f_X(x) > 0$,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 < y < x; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



当$1 < x < 2$时，$f_X(x) = 2 - x > 0,$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x}, & x-1 < y < 1; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P}\{0 < \boldsymbol{Y} < 0.5 \big| \boldsymbol{X} = 0.5\}$$

$$= \int_0^{0.5} f_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y} \big| \boldsymbol{X} = 0.5) \boldsymbol{dy}$$

$$= \int_0^{0.5} \frac{1}{0.5} \boldsymbol{dy} = 1.$$

$$\boldsymbol{P}\{0 < \boldsymbol{Y} < 0.5 \big| \boldsymbol{X} = 1.2\}$$

$$= \int_0^{0.5} f_{\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y} \big| \boldsymbol{X} = 1.2) \boldsymbol{dy}$$

$$= \int_{0.2}^{0.5} \frac{1}{0.8} \boldsymbol{dy} = 0.375.$$

1、设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0\le x\le 1, 0<y<x;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求$P(Y\le 1/8\ |X<1/4)$

$$P\{Y\le 1/8 \mid X<1/4\}=\frac{P\{Y\le 1/8, X<1/4\}}{P\{X<1/4\}}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{1/8}\int_{-\infty}^{1/4} f(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{1/4} f_X(x)dx}$$

二、盒中有6个新乒乓球，每次比赛从其中任取两个球来用，赛后仍放回盒中，求第三次取得两个新球的概率。

解：设A_i={第2次摸出i个新球}，i=0,1,2;

B={第3次摸出两个新球}

因为A_0，A_1，A_2构成Ω的一个划分，所以由全概率公式

$$P(B)=\sum_{k=0}^{2}P(A_k)P(B\mid A_k)$$

因为,$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_0)=\frac{\boldsymbol{C}_2^2\boldsymbol{C}_4^0}{\boldsymbol{C}_6^2}=\frac{1}{15}$,$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_1)=\frac{\boldsymbol{C}_4^1\boldsymbol{C}_2^1}{\boldsymbol{C}_6^2}=\frac{8}{15}$,

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_2)=\frac{\boldsymbol{C}_2^0\boldsymbol{C}_4^2}{\boldsymbol{C}_6^2}=\frac{6}{15}$;

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A}_0)=\frac{\boldsymbol{C}_4^2\boldsymbol{C}_2^0}{\boldsymbol{C}_6^2}=\frac{6}{15}$,$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A}_1)=\frac{\boldsymbol{C}_3^2\boldsymbol{C}_3^0}{\boldsymbol{C}_6^2}=\frac{3}{15}$,

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{A}_2)=\frac{\boldsymbol{C}_4^0\boldsymbol{C}_2^2}{\boldsymbol{C}_6^2}=\frac{1}{15}$;

所以,$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})=\frac{4}{25}=0.16$

三、设$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$的联合概率密度为

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}\boldsymbol{A}\sin(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), & 0\le \boldsymbol{x}\le \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2}, 0\le \boldsymbol{y}\le \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1)求常数$\boldsymbol{A}$;(2)$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{Y}$是否独立?

解:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy}=\iint_{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{dxdy}$$

$$\boldsymbol{D}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\middle|0\le \boldsymbol{x}\le \frac{\boldsymbol{\pi}}{2}, 0\le \boldsymbol{y}\le \frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\right\}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_0^{\frac{\pi}{2}} A\sin(x+y)dy \Rightarrow A=\frac{1}{2}.$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin(x+y)dy=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x), & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\text{同理}, f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\sin y+\cos y), & 0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然,当$0<x<\pi/2, 0<y<\pi/2$时,

$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$,因此$X$与$Y$不独立。

四、设随机变量$\boldsymbol{X} \sim \boldsymbol{U}(1,2)$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{X}}$,求$\boldsymbol{f_Y}(\boldsymbol{y})$.

解：$\boldsymbol{F_Y}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y} \leq \boldsymbol{y}\} = \boldsymbol{P}\{\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{X}} \leq \boldsymbol{y}\}$

$$= \begin{cases} \boldsymbol{P}\{2\boldsymbol{X} \leq \ln \boldsymbol{y}\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\ln \boldsymbol{y}} \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}, & \boldsymbol{y} > 0; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

当$\boldsymbol{e}^2 > \boldsymbol{y} > 0$时,$\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\ln \boldsymbol{y}} \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = 0$;

当$\boldsymbol{e}^4 > \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{e}^2$时,$\int_{1}^{\frac{1}{2}\ln \boldsymbol{y}} 1\boldsymbol{dx} = \frac{1}{2}\ln \boldsymbol{y} - 1$;

当$\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{e}^4$时,$\int_{1}^{\frac{1}{2}\ln \boldsymbol{y}} \boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \int_{1}^{2} 1\boldsymbol{dx} = 1$;

所以

$$\boldsymbol{F_Y}(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} 0, & \boldsymbol{y} < \boldsymbol{e}^2; \\ \dfrac{1}{2}\ln \boldsymbol{y} - 1, & \boldsymbol{e}^2 \le \boldsymbol{y} < \boldsymbol{e}^4; \\ 1, & \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{e}^4. \end{cases}$$

求导

$$\boldsymbol{f_Y}(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\boldsymbol{y}}, & \boldsymbol{e}^2 \le \boldsymbol{y} < \boldsymbol{e}^4; \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

另解：因为$f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in(1,2);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

对$y=g(x)=e^{2x}$，因为$y'=2e^{2x}>0$，

且$x=h(y)=\dfrac{1}{2}\ln y$

由公式$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))\,|\,h'(y)\,|, & \alpha<y<\beta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

这里

$$\boldsymbol{\alpha} = \min\{\boldsymbol{g}(1), \boldsymbol{g}(2)\} = \boldsymbol{e}^2$$

$$\boldsymbol{\beta} = \max\{\boldsymbol{g}(1), \boldsymbol{g}(2)\} = \boldsymbol{e}^4$$

所以

$$\boldsymbol{f_Y}(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\boldsymbol{y}}, & \boldsymbol{e}^2 < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{e}^4; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例5：设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} A(4x-2x^2), & 0<x<2; \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

(1)求$P(0<X<1), P(X>1)$.

(2)求X的分布函数$F(x)$;

解：因为$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dx+$

$$\int_0^2 A(4x-2x^2)dx+\int_2^{+\infty} 0dx=\frac{8}{3}A$$

所以$A=\dfrac{3}{8}$.

$$(1)\boldsymbol{P}\{0<\boldsymbol{x}<1\}=\int_0^1 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}=\int_0^1 \frac{3}{8}(4\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

$$=\frac{1}{2};$$

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}>1\}=\int_1^{+\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}=\int_1^2 \frac{3}{8}(4\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}^2)\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

$$+\int_2^{+\infty}0\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}.$$

或$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}>1\}=1-\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{x}\leq 1\}=1-\boldsymbol{P}\{0<\boldsymbol{x}<1\}=\dfrac{1}{2}.$

(2)由概率密度定义知$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{d}\boldsymbol{t}$，

当$\boldsymbol{x}<0$时，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{x}0\boldsymbol{dt}=0$;

当$0<\boldsymbol{x}<2$时，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{0}0\boldsymbol{dt}+\int_{0}^{x}(\frac{3}{2}\boldsymbol{t}-\frac{3}{4}\boldsymbol{t}^{2})\boldsymbol{dt}$

$$=\frac{3}{4}\boldsymbol{x}^{2}-\frac{1}{4}\boldsymbol{x}^{3};$$

当$\boldsymbol{x}\geq 2$时，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{0}0\boldsymbol{dt}+\int_{0}^{2}(\frac{3}{2}\boldsymbol{t}-\frac{3}{4}\boldsymbol{t}^{2})\boldsymbol{dt}$

$$+\int_{2}^{x}0\boldsymbol{dt}=1$$

所以

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 0, & \boldsymbol{x}\le 0; \\ \dfrac{3}{4}\boldsymbol{x}^2-\dfrac{1}{4}\boldsymbol{x}^3, & 0<\boldsymbol{x}<2; \\ 1, & \boldsymbol{x}\ge 2. \end{cases}$$

三、某人需乘车到飞机场搭飞机，路上所需要时间为X，且$X \sim N(50,100)$(单位：分钟)。

(1)若距飞机起飞仅65分钟，计算能及时赶上飞机的概率？

(2)若要求以95%的概率保证能及时赶上飞机，距飞机起飞时刻至少需要提前多少时间出发？

$(\Phi(1.65) = 0.95, \Phi(1.5) = 0.9332)$

四、随机变量X的概率密度为

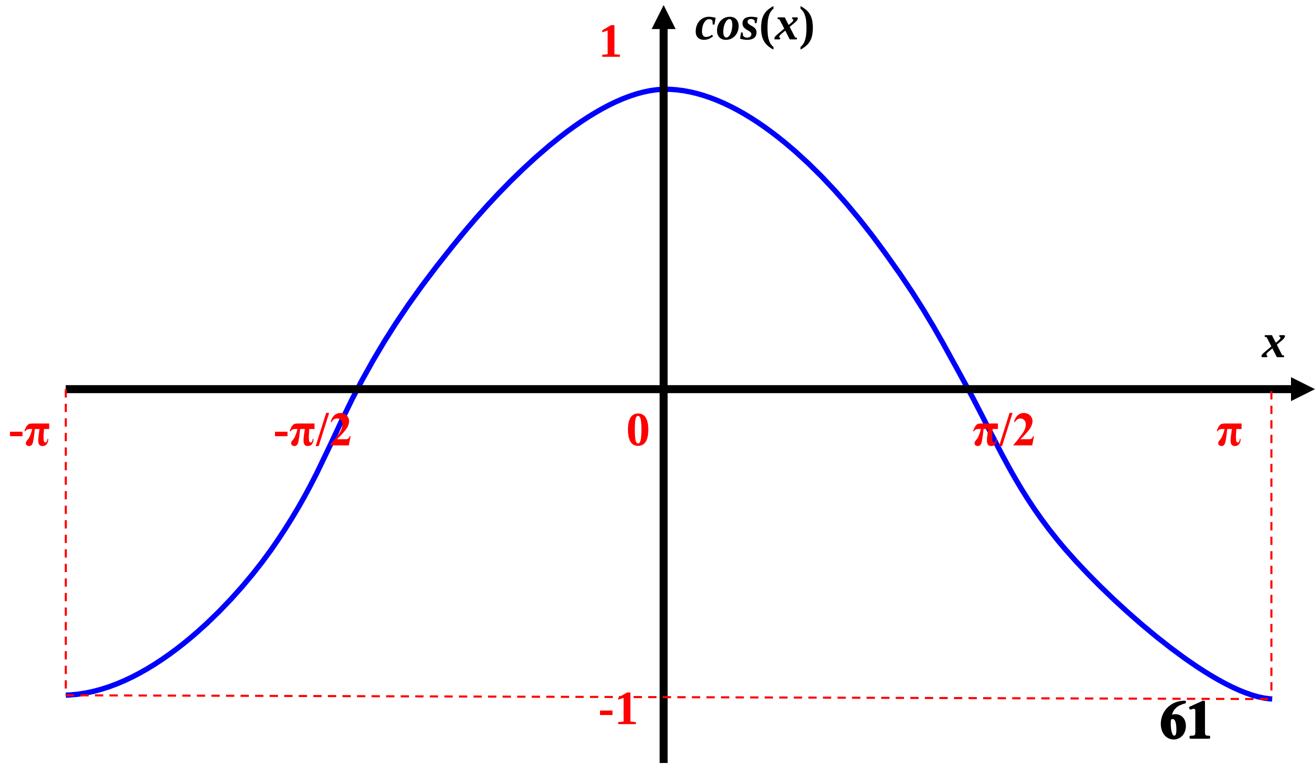
$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x, & x\in(0,T)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1)确定参数T;

(2)计算$P\{X<\dfrac{T}{2}\},P\{X\geq\dfrac{T}{2}\},P\{X=\dfrac{T}{2}\},P\{X\leq 3\}$.

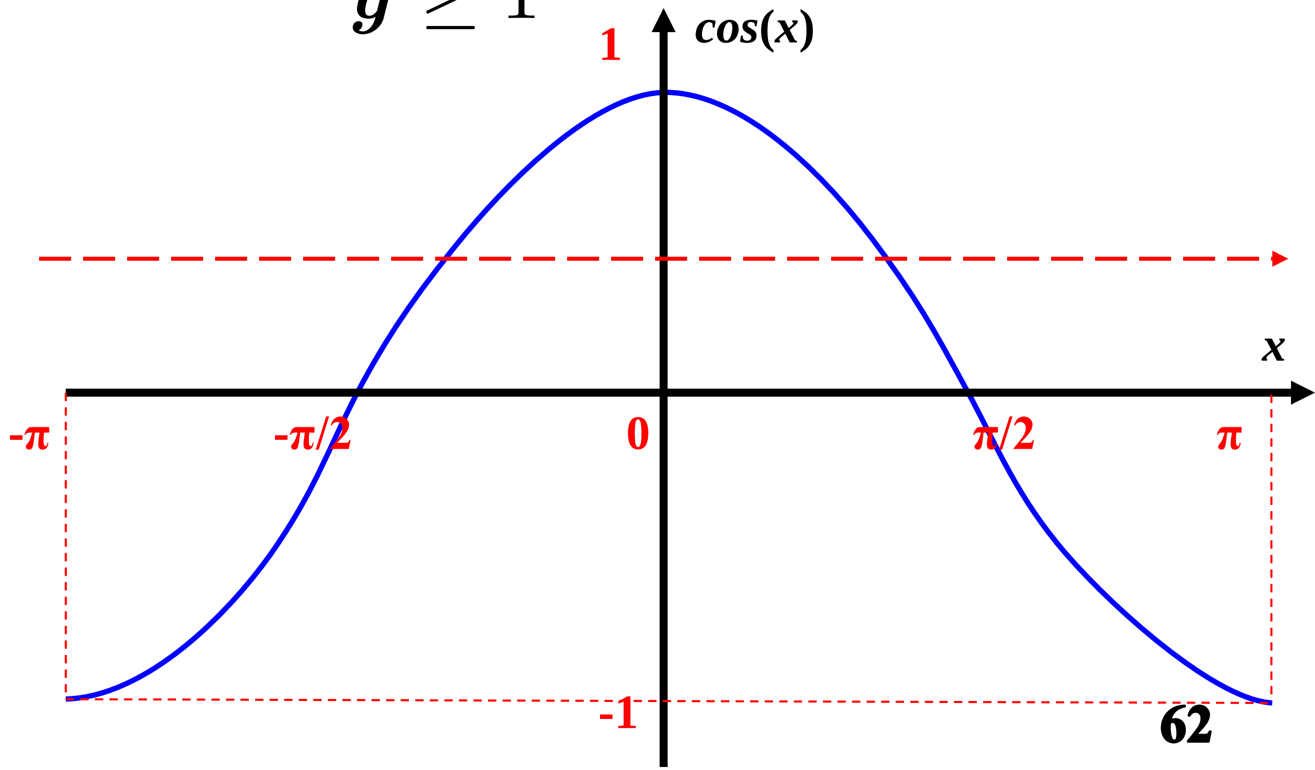
五、设随机变量$Y=\cos(X)$,其中随机变量$X\sim U(-\pi,\pi)$,试求Y的分布函数以及概率密度.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & x \in (-\pi, \pi) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$



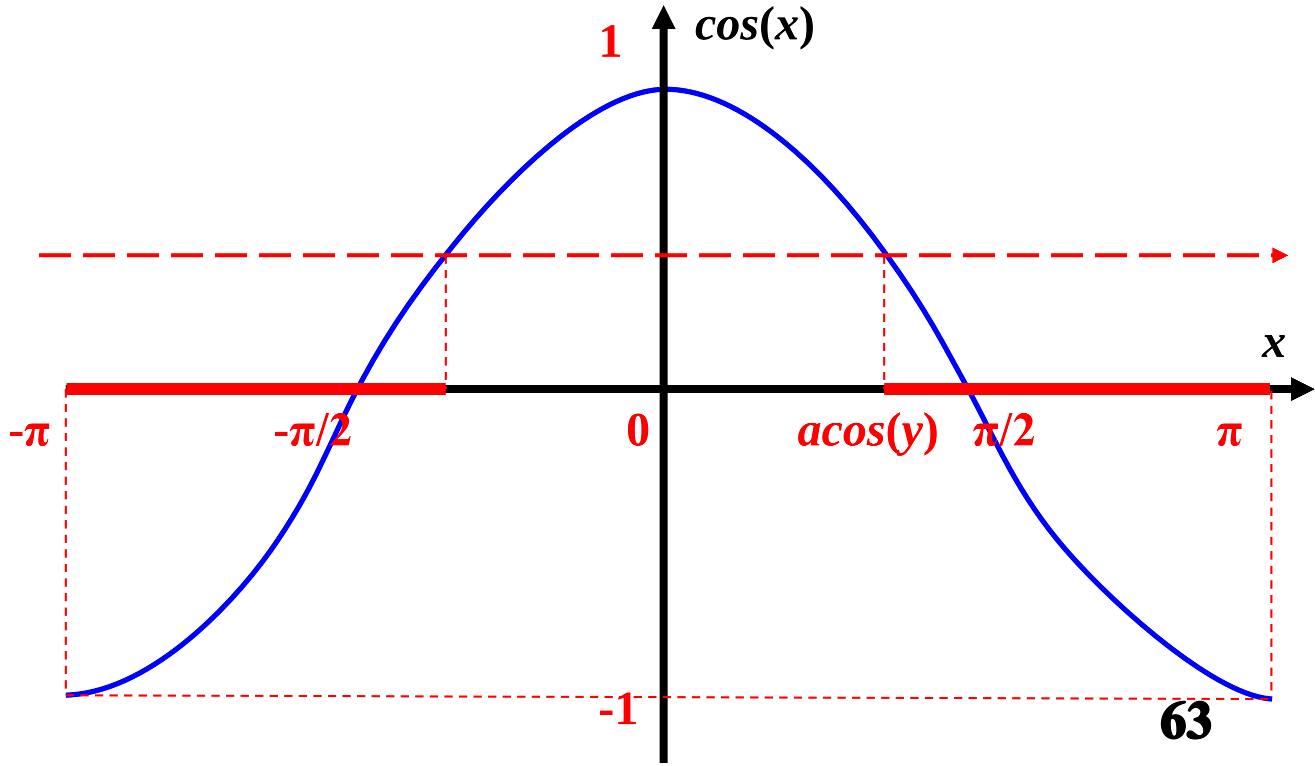
$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\cos X < y\}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ \displaystyle\int_{\{x|\cos(x)<y\}} f_X(x)\,dx, & -1 < y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$



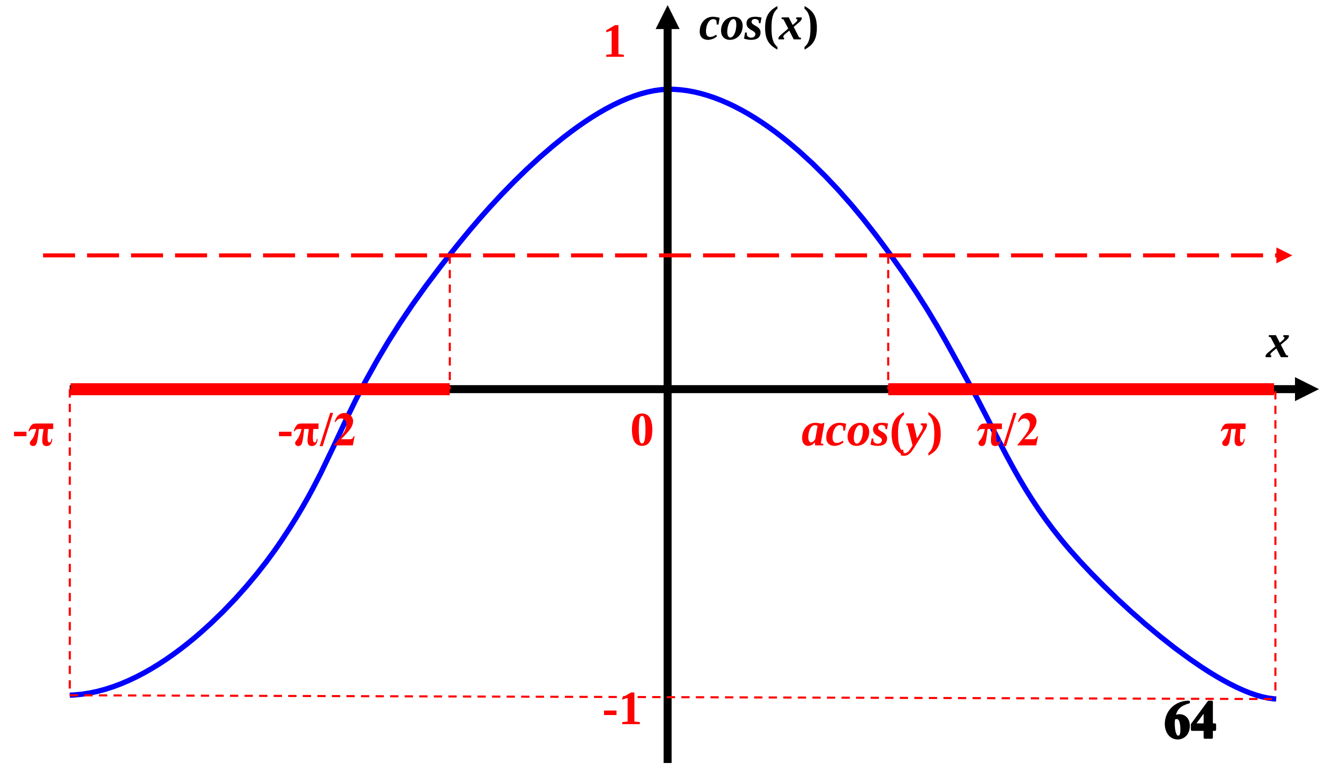
$$F_Y(y) = P\left\{Y < y\right\} = P\{\cos X < y\}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ 2\int_{\mathrm{acos}(y)}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx, & -1 < y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$



$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{\cos X < y\}$$

$$= \begin{cases} 0, & y \le -1 \\ 1 - \dfrac{\operatorname{acos}(y)}{\pi}, & -1 < y < 1 \\ 1, & y \ge 1 \end{cases}$$



$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-\boldsymbol{y}^2}}, & -1 < \boldsymbol{y} < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$