

非线性方程求根方法

李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn

<http://xiaozhouli.com>

迭代的思想

设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的根，通过迭代计算，产生序列

$$x_0 \rightarrow x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow x_n = \varphi(x_{n-1}) \rightarrow \cdots$$

只需 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

- 将一个计算过程反复进行称为迭代, 迭代法是一类常见常用的计算技术
- 如何将二分法迭代改写成上述公式?

问题

- 构造有效的迭代格式
- 选取合适的迭代初值
- 对迭代格式进行收敛性分析

不动点迭代法

不动点迭代法

- 不动点迭代法
- 不动点迭代的收敛性
- 迭代序列的收敛速度
- 序列收敛加速方法

不动点 (Fixed Point)

若迭代法产生的序列收敛 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \implies \varphi(x^*) = x^*$$

- 若实数 x^* 满足 $\varphi(x^*) = x^*$, 则称 x^* 为函数 φ 的不动点

不动点迭代 (Fixed Point Iteration)

- 与求根问题的联系？

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = x$$

- 即将求 $f(x)$ 的根转换为求 $\varphi(x)$ 的不动点
 - 如何转换？

不动点迭代 (Fixed Point Iteration)

选择合适的初值 x_0

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

- 若序列收敛 $x_n \rightarrow x^*$, 则称迭代是收敛的。 x^* 是 $f(x)$ 的, 是 $\varphi(x)$ 的不动点
- 将非线性方程求解归结为一系列显式的函数值计算

几何意义 — 蛛网图

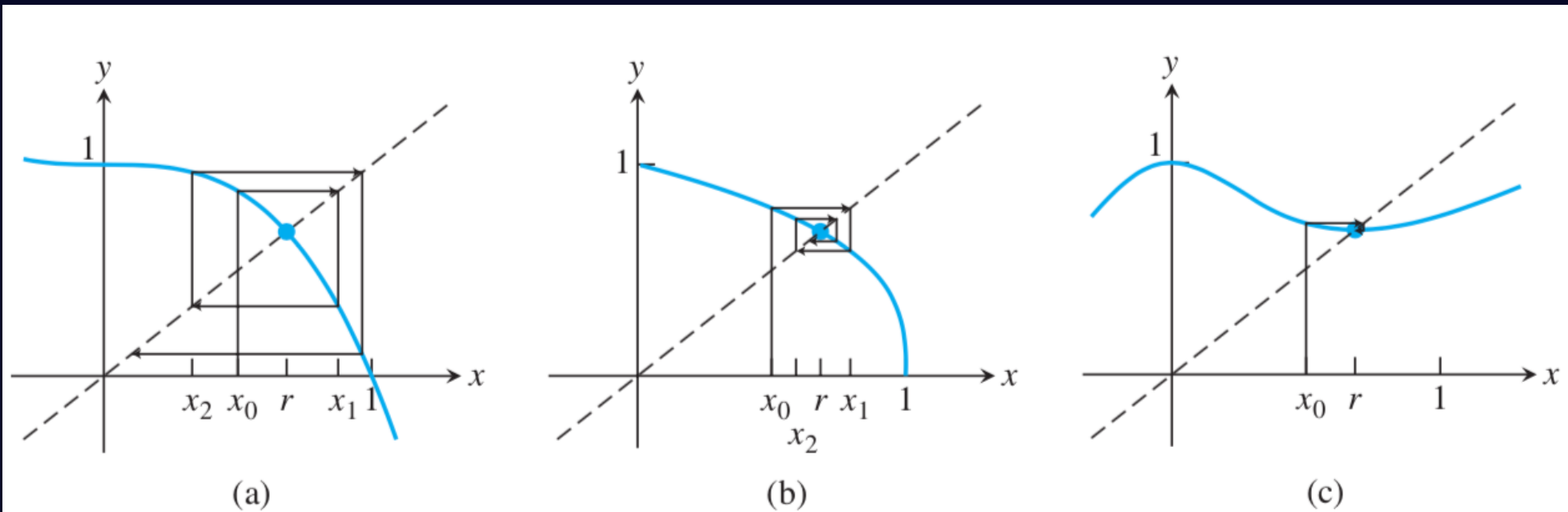


Figure 1.3 Geometric view of FPI. The fixed point is the intersection of $g(x)$ and the diagonal line. Three examples of $g(x)$ are shown together with the first few steps of FPI. (a) $g(x) = 1 - x^3$ (b) $g(x) = (1 - x)^{1/3}$ (c) $g(x) = (1 + 2x^3)/(1 + 3x^2)$

例 已知方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1,2]$ 上有一个根，构造其不动点迭代格式

例 已知方程 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ 在 $[1,2]$ 上有一个根，构造其不动点迭代格式

$$1. \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

$$2. \quad \varphi(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

● 取初值 $x_0 = 1.5$ ，哪种格式比较好？

不动点的存在唯一性

引理：如果 $\varphi(x) \in C^1[a, b]$ 满足条件

$$(1) a \leq \varphi(x) \leq b, \quad (2) |\varphi'(x)| \leq L < 1$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 有唯一的不动点

证：

全局收敛定理

定理：如果 $\varphi(x) \in C^1[a, b]$ 满足条件

$$(1) a \leq \varphi(x) \leq b, \quad (2) |\varphi'(x)| \leq L < 1$$

则对任意的初值 $x_0 \in [a, b]$ ，迭代格式 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 产生的序列收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^* ，且满足

$$|x^* - x_n| \leq \frac{1}{1-L} |x_{n+1} - x_n|$$

证：

局部收敛定理

定理： 设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点， 如果 $\varphi'(x)$ 在 x^* 的某领域连续且满足条件 $|\varphi'(x^*)| < 1$ 。 则对充分接近 x^* 的初值 x_0 ， 迭代格式 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 产生的序列收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^* 。

证：

例 已知不动点迭代格式 $\varphi(x) = x^2 - 2.8x$, 求其不动点。

- 如何取初值 x_0 ?

迭代序列的收敛速度

数列的 r 阶收敛概念

设迭代法产生的序列收敛 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$, 若存在 $a > 0, r > 0$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^r} = a$, 则称数列是 r 阶收敛

- 收敛阶 $r = 1$ 时, 称为线性收敛
- 收敛阶 $r > 1$ 时, 称为超线性收敛
- 收敛阶 $r = 2$ 时, 称为平方收敛

收敛阶高好
还是低好?

不动点迭代序列的收敛速度

定理：若不动点迭代收敛，则其至少是线性收敛

证：

- 为什么是至少？

不动点迭代序列的收敛速度

定理： 设 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点， 如果满足 $\varphi'(x^*) = \varphi''(x^*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x^*) = 0$ 且 $\varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$, 则迭代 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 为 p 阶收敛。

证： (Taylor公式)

例 用不动点迭代法求解方程 $x^2 - 3 = 0$:

- $\varphi(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 3)$

- $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$

如何提高收敛速度？

Aitken加速方法

对线性收敛序列有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} = C$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \approx \frac{x_{n+2} - x^*}{x_{n+1} - x^*} \Rightarrow x^* \approx x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

得到加速收敛序列

$$\bar{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

谢谢！