数据插值方法

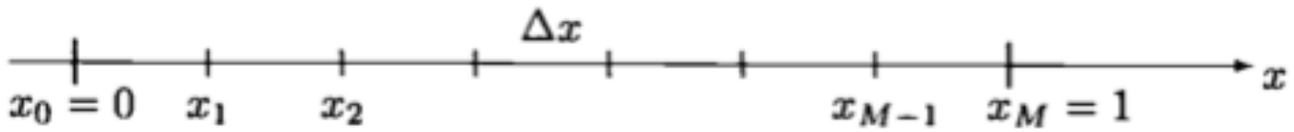
李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn

http://xiaozhouli.com

问题

- Poisson方程的有限差分法

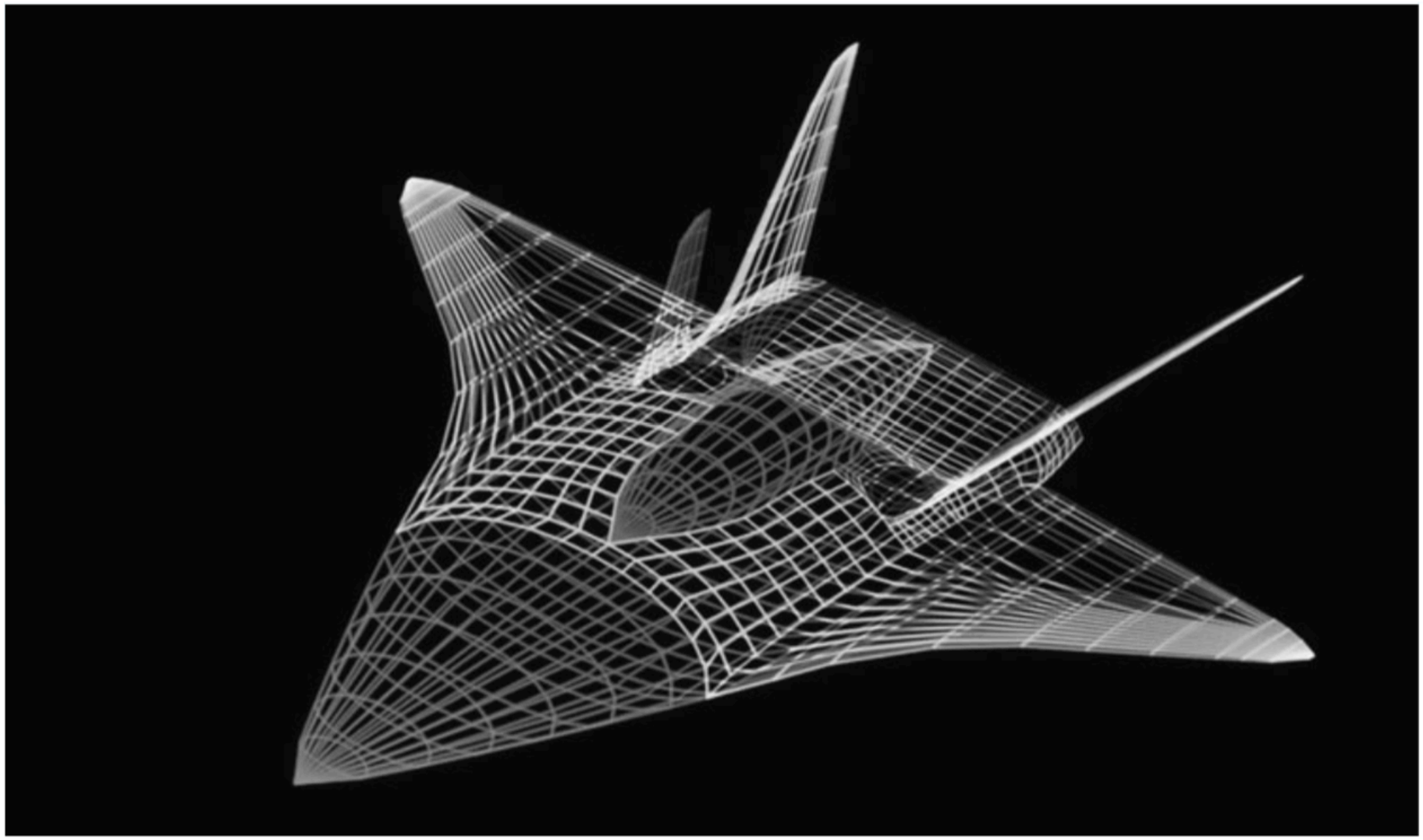


- 在网格点x_j上对函数$u(x_j)$进行逼近

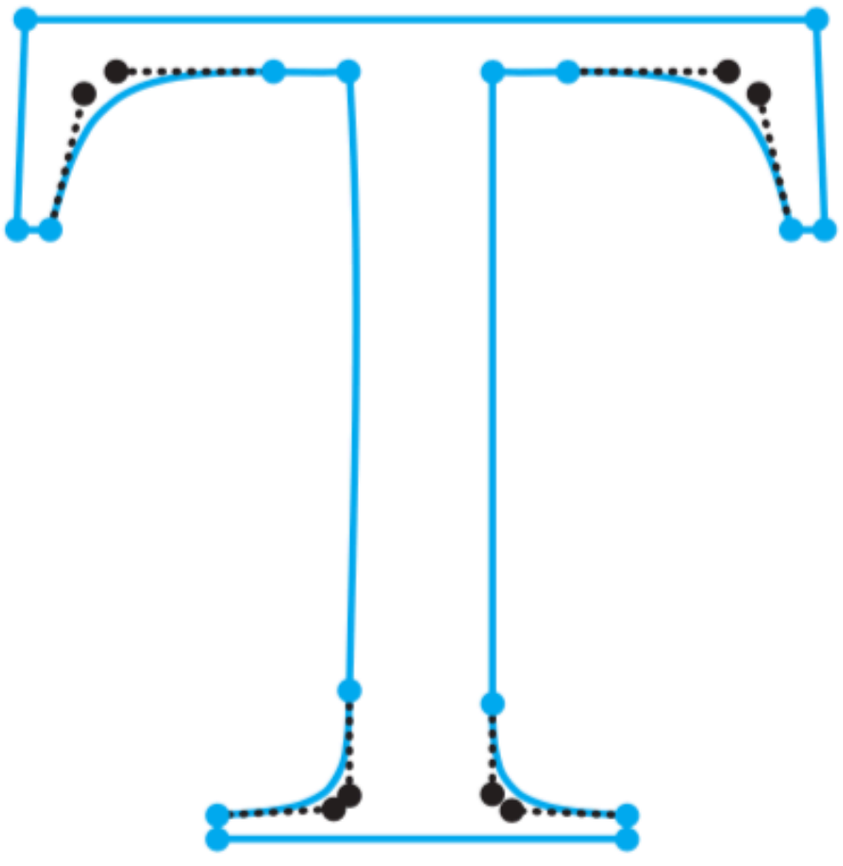
$$u(x_j) \approx u_j, \quad j = 0, \ldots, M$$

- 当$x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_M\}$时，$u(x) = ?$

战斗机设计问题



计算机字体



数据与插值函数

- 数据的有效表达方式是科学问题研究和理解的基础。例如(x_j, u_j)是函数$u(x)$上的点，如何用这一组有限的信息来表示$u(x)$这个实函数的无限信息。
  - 设计一个简单且容易计算的函数$P(x)$代替原函数。

数据与插值函数

定义　如果函数$P(x)$满足$y_j = P(x_j)$,
$(j = 0,\ldots, n)$，那么称$P(x)$插值了数据点
$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$，其中$P(x)$称为插值函数，
点$x_0, \ldots, x_n$称为插值节点。

插值问题

- 插值函数的选择和构造
- 插值函数的存在唯一性
- 插值误差

插值多项式

- Lagrange插值
- Newton插值
- 函数的近似表示

插值多项式

- 选择插值函数$P(x)$为多项式函数
  - 直观的数学性质
  - 存在唯一性有着简单的理论
  - 多项式函数是计算机最基本的函数

插值多项式

考虑$[a,b]$上的点$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，已知函数值$y_j = f(x_j)\,(j = 0,1,\ldots,n)$，若存在多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

使得$P_n(x_j) = y_j\,(j = 0,1,\ldots,n)$，则称$P_n(x)$为$f(x)$的插值多项式。

插值多项式的存在唯一性

定理5.1 若插值结点$x_0, x_1, \ldots, x_n$是$(n+1)$个互异的点，则满足插值条件

$$P_n(x_j) = y_j (j = 0,1,\ldots,n)$$

的次数不大于n次的插值多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

存在且唯一

证：

Lagrange插值

插值多项式的构造

将n次插值多项式写成如下形式

$$L_n(x) = \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \cdots + \ell_n(x)y_n$$

其中$\ell_j(x)$被称为插值基函数，为满足条件

$$\ell_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

的n次多项式。

Lagrange插值

n次的插值多项式

$$L_n(x) = \ell_0(x)y_0 + \ell_1(x)y_1 + \cdots + \ell_n(x)y_n$$

其中第j个插值基函数

$$\ell_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

- 显示的构造基函数$\ell_j(x)$

例　找出点(0,1), (2,2), (3,4)的插值多项式

例　找出点(0,2), (1,1), (2,0), (3, − 1)的插值多项式

Lagrange插值

- Lagrange插值是唯一的
- Lagrange插值非常直观
- 但计算代价如何呢？

Newton插值

Newton插值

- 尽管插值多项式是唯一的
- 能否简单的构造出形如

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

的具有简单形式的插值多项式

- **Newton插值形式**

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots$$
$$+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

例　对x_0, x_1, x_2推导二次插值多项式的Newton形式

Newton差商（divided difference）

定义5.3 若已知函数$f(x)$在点$x_0, x_1, \ldots, x_n$处的值$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$。

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}] - f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]}{x_{k+3} - x_k}$$

$\cdots$

Newton's divided differences

Given $x = [x_1, \ldots, x_n]$, $y = [y_1, \ldots, y_n]$

for $j = 1, \ldots, n$
$\quad f[x_j] = y_j$
end

for $i = 2, \ldots, n$
$\quad$ **for** $j = 1, \ldots, n + 1 - i$
$\quad\quad f[x_j \ldots x_{j+i-1}] = (f[x_{j+1} \ldots x_{j+i-1}] - f[x_j \ldots x_{j+i-2}])/(x_{j+i-1} - x_j)$
$\quad$ **end**
end

The interpolating polynomial is

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f[x_1 \ldots x_i](x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})$$

Newton差商

差商的递归定义可以组织为一个方便使用的表。例如，对于三个点，表的形式为

$$
\begin{array}{lll}
x_0 & f[x_0] & \\
 & & f[x_0, x_1] \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] \\
 & & f[x_1, x_2] \\
x_2 & f[x_2] &
\end{array}
$$

例　找出点(0,1), (2,2), (3,4)的插值多项式

例　在上例的数据中加入点(1,0)。

例　找出点(0,2), (1,1), (2,0), (3, − 1)的插值多项式

插值多项式的主要用途

- 插值多项式的主要用途是用多项式求值计算，来替换函数复杂的求值计算
- 这也可以作为一种形式的压缩，复杂问题可以通过简单可计算的问题进行替换，当然在精度上可能会有损失。

例 在区间[0,π/2]上，使用4个均匀采样的点插值函数$f(x) = \sin x$。

插值方法的预测性？

- 插值多项式在采样区间外的表现
- 一个有趣的例子
  - Mathematician Predicts Who Will Live and Die in Game of Thrones

谢谢！