线性方程组的迭代法

李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn
http://xiaozhouli.com

线性方程组的不动点迭代

选择合适的初值$x^{(0)}$

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad n = 0,1,\ldots,$$

- $\varphi(x) = x - C(Ax - b) = (I - CA)x + Cb$
- $x^{(k)} \to x^* \iff \rho(I - CA) < 1$
- 如何选取合适的矩阵C?

线性方程组的迭代法

- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel迭代法
- SOR迭代法

$$A = D - L - U$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = -\begin{pmatrix} 0 & & & \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad U = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi迭代法

取$C = D^{-1}$，则

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - D^{-1}(Ax^{(k)} - b)$$

或 $$Dx^{(k+1)} = b + (L + U)x^{(k)}$$

或

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum\limits_{j<i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum\limits_{j>i} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

例 用Jacobi迭代法求解$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel迭代法

取$C=(D-L)^{-1}$，则

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-(D-L)^{-1}(Ax^{(k)}-b)$$

或 $$(D-L)x^{(k+1)}=b+Ux^{(k)}$$

或

$$x_i^{(k+1)}=\frac{b_i-\sum_{j<i}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j>i}a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

例 用Gauss-Seidel迭代法求解$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

例 用Jacob迭代法与Gauss-Seidel迭代法求解$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

这里取$x^{(0)}=[0,0,0]^T$，计算$x^{(2)}$，并判断迭代算法的收敛性。

Jacobi vs. Gauss-Seidel

- 两者的计算量相同，每次迭代的计算复杂度均为$\mathcal{O}(n^2)$
- Jacobi迭代法需要储存$x^{(k)}$与$x^{(k+1)}$
- 一般来说，如果收敛，Gauss-Seidel迭代法收敛速度较快
- 两种算法是否一定收敛呢？

严格对角占优矩阵

定义4.1 若矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$满足

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \ i = 1,\ldots,n\,.$$

则称A为严格对角占优阵。

推论 A是严格对角占优矩阵，则A非奇异。

严格对角占优矩阵

定理4.3 若$Ax=b$的系数矩阵A是严格对角占优矩阵, 则Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代法收敛。

证：$B_J=D^{-1}(L+U)$，$B_{GS}=(D-L)^{-1}U$

实对称正定矩阵

定理4.4　线性方程组$Ax = b$，若A是实对称正定矩阵，则Gauss-Seidel迭代法收敛。

证：

- Jacobi迭代法？

SOR迭代法 (Successive Over Relaxation)

Extrapolation思想

若x^*有两个精度相当的近似值$x^{(k)}$和$\bar{x}^{(k+1)}$

- 可否将这两个近似值加工成更高精度的结果?
- 改善精度的一种简便而有效的办法是，取两者的某种加权平均值作为改进值，即令

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega\bar{x}^{(k+1)}$$

或者 $$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega(\bar{x}^{(k+1)} - x^{(k)})$$

SOR迭代法

选取Gauss-Seidel迭代法获得$\bar{x}^{(k+1)}$

$$\bar{x}_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

则由$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega\bar{x}^{(k+1)}$,

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega\frac{b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j\geq i} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

SOR迭代法

矩阵形式，取$C = \omega(D - \omega L)^{-1}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \omega(D - \omega L)^{-1}(Ax^{(k)} - b)$$

或

$$(D - \omega L)x^{(k+1)} = \omega b + \left((1 - \omega)D + \omega U\right) x^{(k)}$$

- ω被称为松弛因子，$\omega > 1$超松弛
- Gauss-Seidel迭代法是SOR法的特例

SOR迭代法的收敛性

定理4.7 SOR迭代法收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2$。

定理4.8　若A是实对称正定矩阵，则当 $0 < \omega < 2$时，SOR方法收敛。

例　用SOR迭代法求解$Ax = b$，其中

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

回顾迭代法的收敛速度

设迭代法产生的序列收敛 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$，若存在$a > 0,\ r > 0$使得 $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^r} = a$，则称数列是$r$阶收敛。

- 线性方程组的不动点迭代均为线性收敛
- 那么收敛系数a如何确定？

迭代法的收敛速度

对线性方程组的不动点迭代法，收敛系数 $a = \rho(I - CA)$

- Jacobi：$B_J = D^{-1}(L + U)$
- Gauss-Seidel：$B_{GS} = (D - L)^{-1}U$
- SOR：$B_{SOR} = (D - \omega L)^{-1}\big((1 - \omega)D + \omega U\big)$

因此需要研究矩阵的特征值问题！

例 用迭代法求解$Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

谢谢！