

线性方程组的迭代法

李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn

<http://xiaozhouli.com>

问题

- 线性方程组的直接法
 - 高斯消元法在有限步之内给出了线性方程组 $Ax = b$ 的一个解。
 - 复杂度为 $\mathcal{O}(n^3)$
- 能否设计出更高效的算法？迭代法？

线性方程组的迭代法

- 不动点迭代法的一般理论
- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel迭代法
- SOR迭代法
- 其它迭代法：共轭梯度法等

回顾：迭代的思想

设 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的根，通过迭代计算，产生序列

$$x_0 \rightarrow x_1 = \varphi(x_0) \rightarrow \cdots \rightarrow x_n = \varphi(x_{n-1}) \rightarrow \cdots$$

只需 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

- 将一个计算过程反复进行称为迭代, 迭代法是一类常见常用的计算技术
- 可否用迭代法求解 $Ax = b$?

非线性方程组 $F(x) = 0$ 的迭代法

- 二分法迭代
- 不动点迭代法 ✓
- Newton迭代法 ✓

线性方程组 $Ax = b$ 呢？

不动点迭代法 的一般理论

不动点迭代法的一般理论

- 不动点迭代的形式
- 不动点迭代的收敛性
- 如何构造合适的迭代法

回顾：不动点迭代

选择合适的初值 $x^{(0)}$

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), \quad n = 0, 1, \dots,$$

- 若序列收敛 $x^{(k)} \rightarrow x^*$ ，则称迭代是收敛的。 x^* 是 $f(x)$ 的根，是 $\varphi(x)$ 的不动点
- 将方程求解归结为一系列显式的函数值计算

线性方程组的不动点迭代

- 将求解线性方程组 $Ax = b$ 转换为求 $\varphi(x)$ 的不动点

$$f(x) = Ax - b = 0 \iff \varphi(x) = x$$

- 如何转换？

$$\varphi(x) = x - (Ax - b) = (I - A)x + b$$

例 用迭代法求解 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 \\ -1 & -1 & 15 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

线性方程组的不动点迭代

- 一般不动点迭代形式

$$\varphi(x) = x - C(Ax - b) = (I - CA)x + Cb$$

- 更一般的迭代形式？

$$\varphi(x) = Bx + f$$

- 收敛性？ 收敛速度？

预备知识

- n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中序列的收敛概念

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x^*\| = 0$$

- 设 $\|\cdot\|_s$ 与 $\|\cdot\|_t$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的任意范数，则存在常数 $c_1, c_2 > 0$ ，使得对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ ，有

$$c_1 \|x\|_s \leq \|x\|_t \leq c_2 \|x\|_s$$

- 例 $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

预备知识

矩阵的谱半径：设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，则称

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

为矩阵 A 的谱半径。

- 若 A 是对称矩阵，则 $\|A\|_2 = \rho(A)$
- 对 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中任意范数 $\|\cdot\|$ ， $\rho(A) \leq \|A\|$

预备知识

压缩映射：若存在常数 $0 \leq L < 1$ ，使得

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n,$$

则称 φ 为压缩映射， L 为压缩系数。

- 回顾之前的知识

线性方程组不动点迭代的收敛性

定理：若 φ 为压缩映射，则对任意的初值 $x^{(0)}$ ，迭代格式 $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ 产生的序列收敛到 $Ax = b$ 的解 x^* ，且

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq L^k \|x^* - x^{(0)}\|$$

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{1-L} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

● $L = ?$

线性方程组不动点迭代的收敛性

由矩阵范数的定义： $L = \|I - CA\|$

- 哪种范数？ $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$?

定理：线性方程组 $Ax = b$ 的不动点迭代法收敛的充要条件是 $\rho(I - CA) < 1$ 。

- $\|I - CA\| < 1 \iff \rho(I - CA) < 1$
- 如何计算 $\rho(I - CA)$?

思考：

如何判别迭代的收敛性比较方便（实用）：

- 范数？ $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ？
- 谱半径？ $\rho(I - CA)$ ？

下一步？

- 如何找到合适的矩阵 C ，使得 $\rho(I - CA) < 1$ ，简单？
 - 有效
 - 计算复杂度

谢谢！