

数据插值方法

李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn

<http://xiaozhouli.com>

问题

- ▶ 插值多项式的主要用途是用多项式求值计算，来替换函数复杂的求值计算，随之而来的就是在精度上可能会有损失
 - ▶ 如何度量插值误差？
 - ▶ 如何使得误差更小？

插值误差

插值误差

- ▶ 误差公式（插值余项）
- ▶ 分段线性插值
- ▶ Hermite插值

插值多项式的误差

定理 满足条件 $P_n(x_j) = f(x_j) \ (j = 0, 1, \dots, n)$ 的多项式 $P_n(x)$ 插值余项为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$,

$$f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}。$$

例 设 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有2阶导数, 如果当 $x \in (a, b)$ 时有 $|f''(x)| \leq M$ 。试证明

$$|R_1(x)| \leq \frac{M}{8}(b-a)^2$$

如何使得插值误差更小？

例 在区间 $[0, \pi/2]$ 上，使用4个均匀采样的点
插值函数 $f(x) = \sin x$ 。

- ▶ 估计插值误差
- ▶ 使用更多的插值点($n > 4$)，即更高次数的多项式 $P_n(x)$

高次插值多项式

是否 n 越大，插值多项式 $P_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 的精度越好？考虑下例

例 在区间 $[-1,1]$ 上，使用均匀采样的点插

值函数 $f(x) = \frac{1}{1 + 12x^2}$ 。

Runge现象

- ▶ 理论上多项式可以拟合任何数据点集，但多项式有其倾向的某些形状
- ▶ 在之前的例子中，插值多项式的值并不像函数 $f(x)$ 的值一样始终在0和1之间，这种现象称为Runge现象。
- ▶ Runge现象常用于描述极端的“多项式扭动”，常常和均匀分布的插值点相伴。

如何使得插值误差更小？

插值余项为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$,

且 $\xi_n \in (a, b)$ 。

Chebyshev插值

思路一：

- ▶ 动机是在插值区间上，提高对插值误差最大值的控制
- ▶ 考虑区间 $[-1,1]$ ，是否可能选取 $x_0, \dots, x_n$
最小化 $\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_{n+1}(x)|$ ？插值误差的最小
最大问题

Chebyshev插值

定理 选择实数 $-1 \leq x_0, \dots, x_n \leq 1$ 使得

$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\omega_{n+1}(x)|$ 尽可能小, 则

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n$$

对应的最小值为 $1/2^n$, x_i 称为 Chebyshev 点

(Chebyshev 多项式的根)

证 (定理 6.1)

Chebyshev插值

- ▶ 选择Chebyshev点可以在区间 $[-1,1]$ 上最小化 $|\omega_{n+1}(x)|$
- ▶ 使用选择Chebyshev点作为插值点的插值多项式称为Chebyshev插值
- ▶ 如果区间为 $[a, b]$, 怎么办?

分段线性插值

思路二（分段线性插值）：

- ▶ 将 $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ 直接用直线段连接起来。
- ▶ 局部化的思想，即在小区间 $[x_j, x_{j+1}]$
($j = 0, \dots, n - 1$)，上做线性插值

$$L_1(x) = y_j \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} + y_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}$$

分段线性插值

- ▶ 用基函数的方式进行表达

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) y_j$$

- ▶ 分段线性插值的误差？

插值函数的光滑性

- ▶ 分段线性插值函数是连续函数，但它的一阶导数不连续
- ▶ 多项式插值是一个极端，它可以进行无限次的微分，但不具有局部性
- ▶ 是否有折中的方法

Hermite插值

Hermite插值的思想

- ▶ 至目前为止，仅要求插值函数 $P(x)$ 满足：

$$P(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0, \dots, n)$$

- ▶ 若函数 $f(x)$ 的导数已知，则可进一步要求

$$P^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j) \quad (k = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n)$$

- ▶ $(m + 1)(n + 1)$ 限制条件

三次Hermite插值

考虑两个插值点 x_0, x_1 的Hermite插值多项式 $H_3(x)$ 满足

$$H(x_j) = f(x_j) = y_j,$$

$$H'(x_j) = f'(x_j) = m_j, \quad (j = 0, 1)$$

- ▶ 共4个限制条件，即需要4个参数，故 $H_3(x)$ 为三次多项式

存在唯一性

定理5.4 若 x_0 和 x_1 互异, 满足插值条件的三次的**Hermite**插值是存在且唯一的

证: 令 $H_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_0 & 3x_0^2 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ m_0 \\ m_1 \end{pmatrix} \quad \det = -(x_0 - x_1)^4$$

基函数表示

对任意 $x \in [x_0, x_1]$, 三次Hermite插值

$$H_3(x) = y_0\alpha_0(x) + y_1\alpha_1(x) + m_0\beta_0(x) + m_1\beta_1(x)$$

其中基函数 $\alpha_j(x), \beta_j(x)$ 满足

$$\alpha_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \alpha'_j(x_i) = 0,$$

$$\beta_j(x_i) = 0, \quad \beta'_j(x_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

基函数表示

经计算可得

$$\alpha_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2,$$

$$\alpha_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2,$$

$$\beta_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2, \quad \beta_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

三次Hermite插值的误差

定理5.5 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 在 (a, b) 内具有4阶导数, 则

$$R(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

证:

分段三次Hermite插值

类似分段线性插值，在小区间 $[x_j, x_{j+1}]$ 上做三次Hermite插值， $(j = 0, \dots, n - 1)$

$$\begin{aligned} H_{j+1}(x) = & \left(1 + 2\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right) \left(\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}\right)^2 y_j \\ & + \left(1 + 2\frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}}\right) \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j}\right)^2 y_{j+1} \\ & + (x - x_j) \left(\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j}\right)^2 m_j + (x - x_{j+1}) \left(\frac{x_j - x}{x_j - x_{j+1}}\right)^2 m_{j+1} \end{aligned}$$

例 求分段三次Hermite插值的误差估计

谢谢！