

线性方程组的迭代法

李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn

<http://xiaozhouli.com>

线性方程组的迭代法:

- Jacobi迭代法
- Gauss-Seidel迭代法
- SOR迭代法

是否回答了研究迭代法的理由？

问题

- 线性方程组的直接法
 - 高斯消元法在有限步之内给出了线性方程组 $Ax = b$ 的一个解。
 - 复杂度为 $\mathcal{O}(n^3)$
- 能否设计出更高效的算法？迭代法？

迭代法的计算复杂度

- 运行一个完整 LU 分解花费 $\mathcal{O}(n^3)$ 阶运算
- 一般地, 迭代法每次迭代花费 $\mathcal{O}(n^2)$ 阶运算, 即每次迭代仅需要完整 LU 分解花费的一部分。
- 问题在于迭代的次数, 即在容忍的范围内需要多少步才能得到收敛性?

迭代法的优势一

迭代的次数 $\ll n$

- 用户的容忍误差比较大
- 已知方程组解的一个较好的近似，可将其作为迭代法的初值 $x^{(0)}$ 开始计算。
 - 已知 $Ax = b$ 的解， A 与 b 有微小扰动

迭代法的优势二

求解大规模稀疏方程组。当矩阵中的很多元素都是0时，矩阵被称为稀疏矩阵。

- 通常，稀疏矩阵只有 $\mathcal{O}(n)$ 个非零元。
- 完全矩阵需要储存 n^2 个元素。注：每个双精度浮点数需要8字节。

例 将矩阵A拓展为 100000×100000 的版本

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

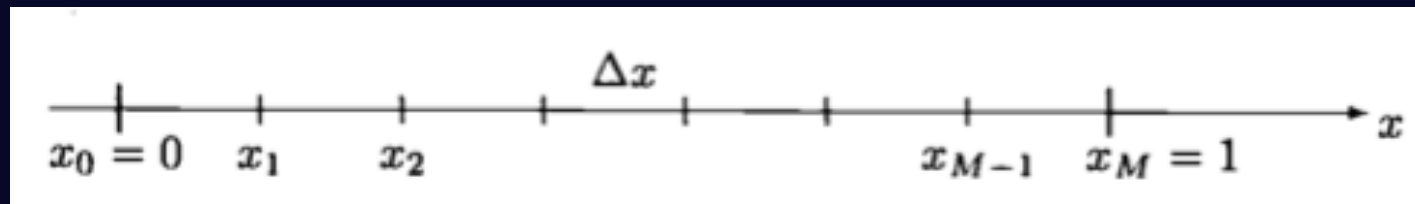
例 一维Poisson方程

- Poisson方程

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 1 \end{cases}$$

Poisson方程的三点有限差分法

- 构造一个均匀网格 $x_j = j\Delta x$, $\Delta x = 1/M$



- 在网格点 x_j 上对函数 $u(x_j)$ 进行逼近

$$u(x_j) \approx u_j, \quad j = 0, \dots, M$$

- 边界条件 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ 。

- 用差分替代微分

$$f(x_j) = -u_{xx}(x_j) \approx \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{\Delta x^2}$$

- 在网格点 x_j 上对函数 $u(x_j)$ 进行逼近

$$\frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{M-2} \\ u_{M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + u_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{M-2} \\ f_{M-1} + u_M \end{pmatrix}$$

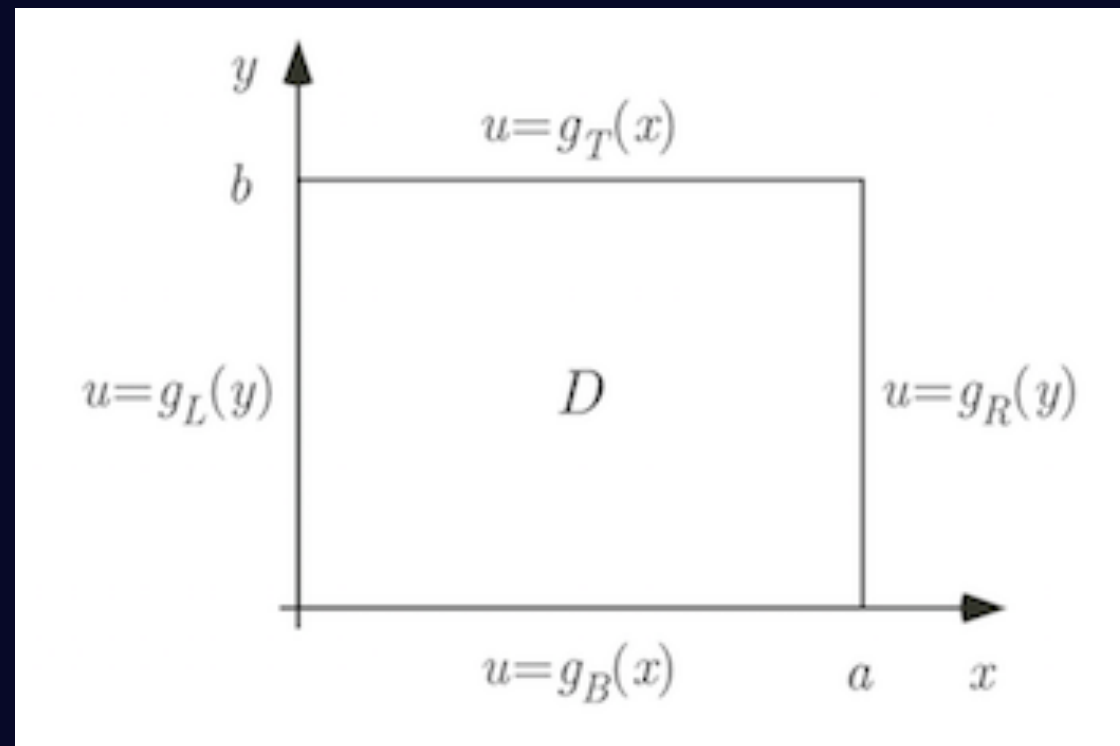
- 大规模稀疏方程组求解

例 二维Laplace方程

- Laplace方程

$$\nabla^2 u = 0, \quad (x, y) \in D$$

- 这里 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 边界条件



Laplace方程的五点有限差分法

- 构造一个均匀矩形网格

$$x_i = i\Delta x, i = 0, 1, \dots, N + 1$$

$$y_j = j\Delta y, j = 0, 1, \dots, M + 1$$

- 在网格点 (x_i, y_j) 上对函数 $u(x_i, y_j)$ 进行逼近

$$u(x_i, y_j) \approx u_{i,j}$$

- 构造出关于 $u_{i,j}$ 的线性方程组。

- 边界条件

$$x = 0 : u_{0,j} = g_L(y_j), \quad \text{for } j = 1, \dots, M$$

$$x = a : u_{N+1,j} = g_R(y_j), \quad \text{for } j = 1, \dots, M$$

$$y = 0 : u_{i,0} = g_B(x_i), \quad \text{for } i = 1, \dots, N$$

$$y = b : u_{i,M+1} = g_T(x_i), \quad \text{for } i = 1, \dots, N$$

- 用差分替代微分:

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- 记 $\lambda = \Delta y / \Delta x$, 五点差分格式:

$$-\lambda^2 u_{i+1,j} + 2(1 + \lambda^2)u_{i,j} - \lambda^2 u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0$$

- 用差分替代微分:

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

- 记 $\lambda = \Delta y / \Delta x$, 五点差分格式:

$$-\lambda^2 u_{i+1,j} + 2(1 + \lambda^2)u_{i,j} - \lambda^2 u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 0$$

- 大规模稀疏线性方程组 $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} T & D & & & \\ D & T & D & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & D & T & D \\ & & & D & T \end{pmatrix}$$

- 其中 D 为 $N \times N$ 单位阵,

$$T = \begin{pmatrix} 2(1+\lambda)^2 & -\lambda^2 & & & \\ -\lambda^2 & 2(1+\lambda)^2 & -\lambda^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda^2 & 2(1+\lambda)^2 & -\lambda^2 \\ & & & -\lambda^2 & 2(1+\lambda)^2 \end{pmatrix}$$

分块迭代法

- 将方程组 $Ax = b$ 中按行列分块

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

- $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $X_i, B_i \in \mathbb{R}^{n_i}$

分块迭代法

$$A = D_B - L_B - U_B$$

- Jacobi块迭代

$$D_B X^{(k+1)} = (L_B + U_B) X^{(k)} + B$$

- Gauss-Seidel块迭代

$$(D_B - L_B) X^{(k+1)} = U_B X^{(k)} + B$$

谢谢！