



《电磁场理论》

屈世伟

shiweiqu@uestc.edu.cn

电子科技大学

二〇二四年二月

第一章 矢量分析

本章内容

- 1.1 矢量代数
- 1.2 三种常用的正交曲线坐标系
- 1.3 标量场的梯度
- 1.4 矢量场的通量与散度
- 1.5 矢量场的环流和旋度
- 1.6 无旋场与无散场
- 1.7 拉普拉斯运算与格林定理
- 1.8 亥姆霍兹定理

1.1 矢量代数

1. 标量和矢量

标量：一个只用大小描述的物理量。

矢量：一个既有大小又有方向特性的物理量，常用黑体字母或带箭头的字母表示。

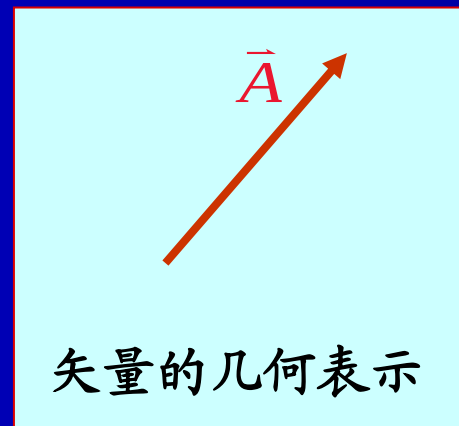
矢量的几何表示：一个矢量可用一条有方向的线段来表示

矢量的代数表示： $\vec{A} = \vec{e}_A A = \vec{e}_A |\vec{A}|$

矢量的大小或模： $A = |\vec{A}|$

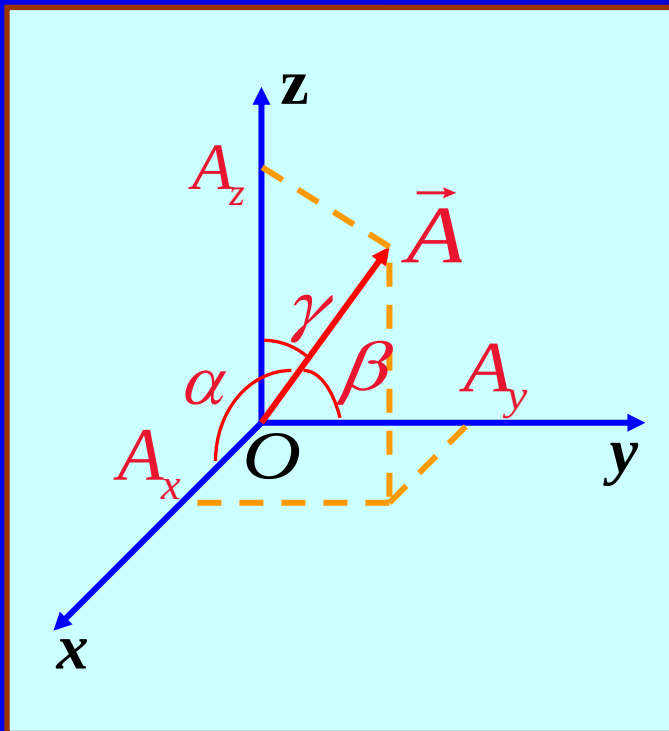
矢量的单位矢量： $\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$

常矢量：大小和方向均不变的矢量。



矢量用坐标分量表示

$$\vec{A} = \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z$$



$$A_x = A \cos \alpha$$

$$A_y = A \cos \beta$$

$$A_z = A \cos \gamma$$

$$\vec{A} = A(\vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \cos \beta + \vec{e}_z \cos \gamma)$$

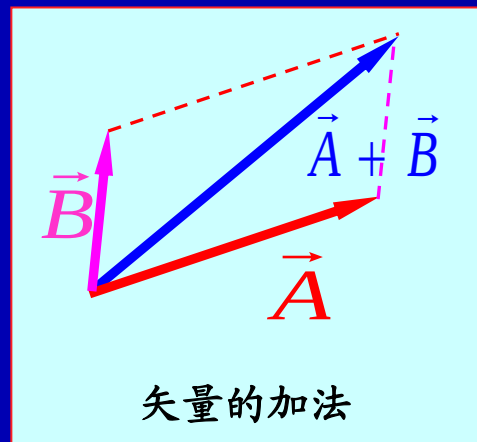
$$\vec{e}_A = \vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \cos \beta + \vec{e}_z \cos \gamma$$

注意：单位矢量不一定是常矢量。

2. 矢量的代数运算

(1) 矢量的加减法

两矢量的加减在几何上是以这两矢量为邻边的平行四边形的对角线, 如图所示。



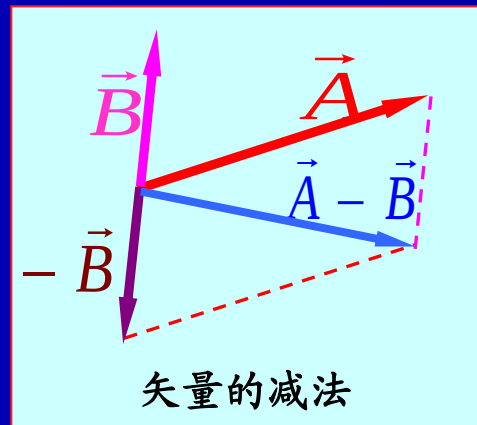
在直角坐标系中两矢量的加法和减法:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \vec{e}_x (A_x \pm B_x) + \vec{e}_y (A_y \pm B_y) + \vec{e}_z (A_z \pm B_z)$$

矢量的加减符合交换律和结合律

交换律 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

结合律 $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$



(2) 标量乘矢量

$$k\vec{A} = \vec{e}_x kA_x + \vec{e}_y kA_y + \vec{e}_z kA_z$$

(3) 矢量的标积 (点积)

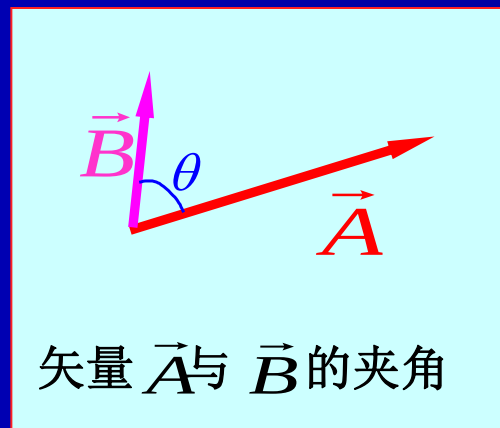
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ —— 矢量的标积符合交换律}$$

$$\vec{A} \perp \vec{B} \longrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{A} \parallel \vec{B} \longrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$



(4) 矢量的矢积 (叉积)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_n AB \sin \theta$$

用坐标分量表示为

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x)$$

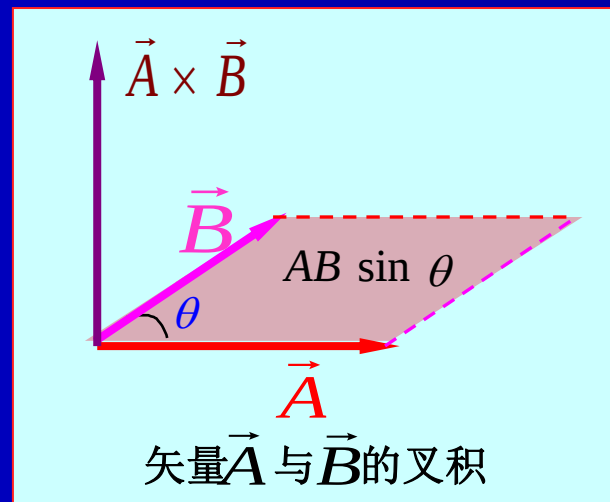
写成行列式形式为

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

若 $\vec{A} \perp \vec{B}$, 则 $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$

若 $\vec{A} \parallel \vec{B}$, 则 $|\vec{A} \times \vec{B}| = 0$



(5) 矢量的混合运算

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C} \quad \text{—— 分配律}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C} \quad \text{—— 分配律}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad \text{—— 标量三重积}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad \text{—— 矢量三重积}$$

1.2 三种常用的正交曲线坐标系

三维空间任意一点的位置可通过三条相互正交曲线的交点来确定。

三条正交曲线组成的确定三维空间任意点位置的体系，称为正交曲线坐标系；三条正交曲线称为坐标轴；描述坐标轴的量称为坐标变量。

在电磁场与波理论中，三种常用的正交曲线坐标系为：直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

1. 直角坐标系

坐标变量 x, y, z

坐标单位矢量 $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

位置矢量 $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$

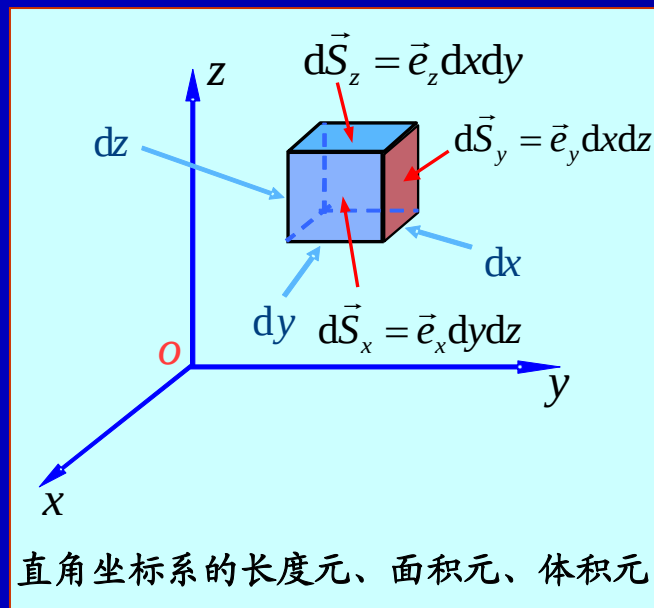
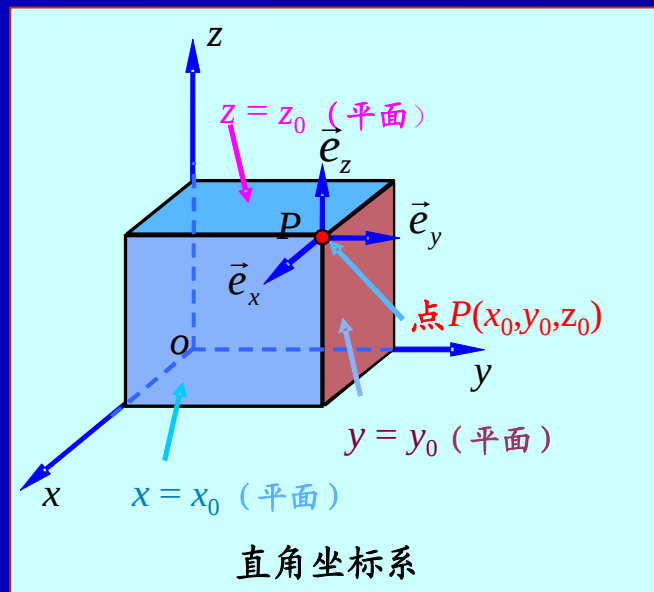
线元矢量 $d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz$

面元矢量 $d\vec{S}_x = \vec{e}_x dl_y dl_z = \vec{e}_x dy dz$

$d\vec{S}_y = \vec{e}_y dl_x dl_z = \vec{e}_y dx dz$

$d\vec{S}_z = \vec{e}_z dl_x dl_y = \vec{e}_z dx dy$

体积元 $dV = dx dy dz$



2. 圆柱坐标系

坐标变量

$$\rho, \phi, z$$

常矢量？

坐标单位矢量

$$\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$$

位置矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z$$

线元矢量

$$d\vec{l} = \vec{e}_\rho d\rho + \vec{e}_\phi \rho d\phi + \vec{e}_z dz$$

面元矢量

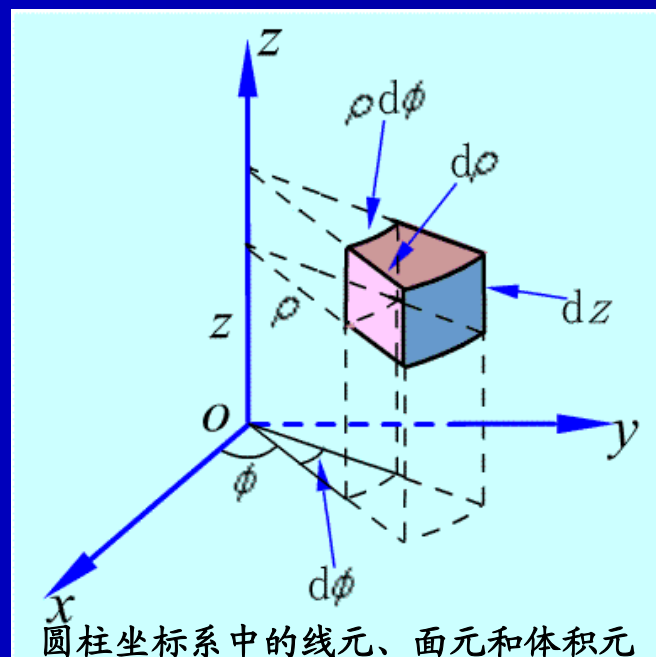
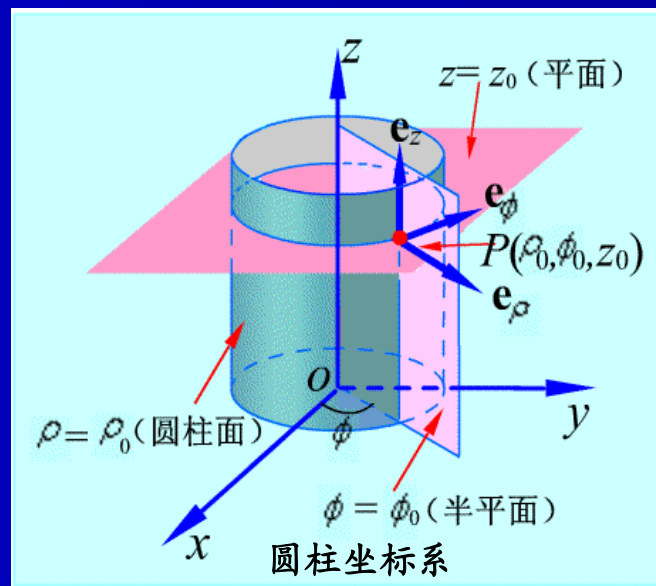
$$d\vec{S}_\rho = \vec{e}_\rho dl_\phi dl_z = \vec{e}_\rho \rho d\phi dz$$

$$d\vec{S}_\phi = \vec{e}_\phi dl_\rho dl_z = \vec{e}_\phi d\rho dz$$

$$d\vec{S}_z = \vec{e}_z dl_\rho dl_\phi = \vec{e}_z \rho d\rho d\phi$$

体积元

$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$



3. 球坐标系

坐标变量

$$r, \theta, \phi$$

常矢量？

坐标单位矢量

$$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$$

位置矢量

$$\vec{r} = \vec{e}_r r$$

线元矢量

$$d\vec{l} = \vec{e}_r dr + \vec{e}_\theta r d\theta + \vec{e}_\phi r \sin \theta d\phi$$

面元矢量

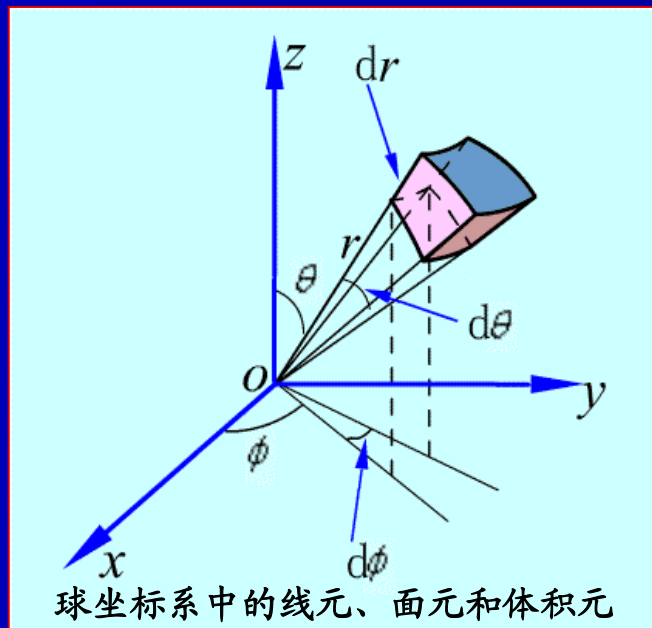
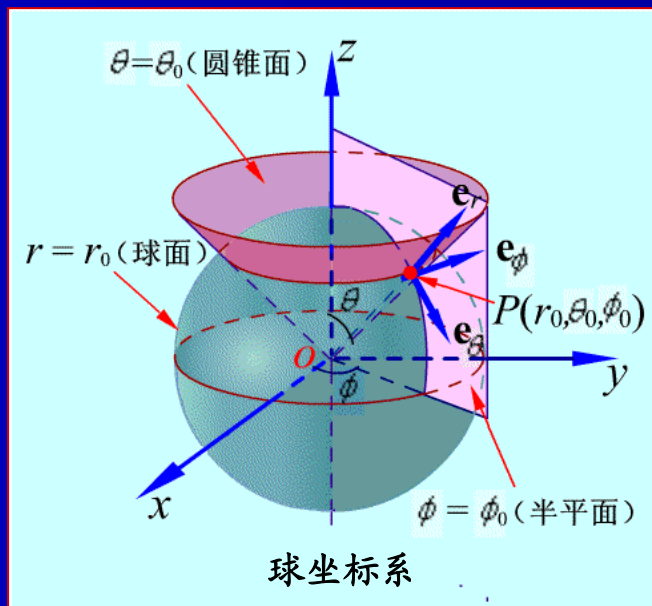
$$d\vec{S}_r = \vec{e}_r dl_\theta dl_\phi = \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

$$d\vec{S}_\theta = \vec{e}_\theta dl_r dl_\phi = \vec{e}_\theta r \sin \theta dr d\phi$$

$$d\vec{S}_\phi = \vec{e}_\phi dl_r dl_\theta = \vec{e}_\phi r dr d\theta$$

体积元

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$



4. 坐标单位矢量之间的关系

直角坐标与
圆柱坐标

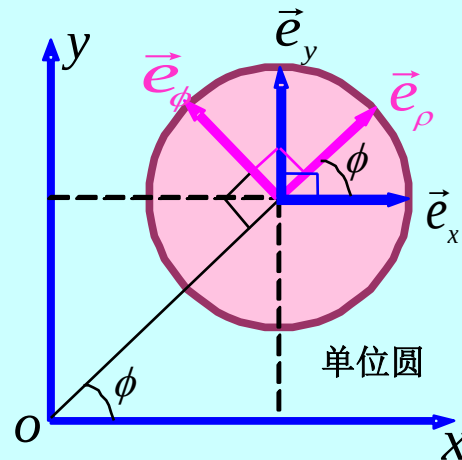
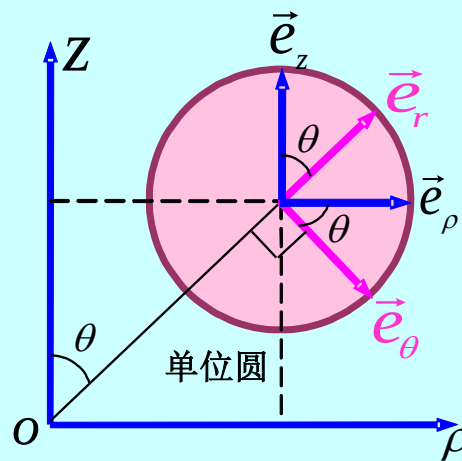
	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_\rho$	$\cos \phi$	$\sin \phi$	0
$\vec{e}_\phi$	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0
$\vec{e}_z$	0	0	1

圆柱坐标与
球坐标

	$\vec{e}_\rho$	$\vec{e}_\phi$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin \theta$	0	$\cos \theta$
$\vec{e}_\theta$	$\cos \theta$	0	$-\sin \theta$
$\vec{e}_\phi$	0	1	0

直角坐标与
球坐标

	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
$\vec{e}_r$	$\sin \theta \cos \phi$	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta$
$\vec{e}_\theta$	$-\cos \theta \cos \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$-\sin \theta$
$\vec{e}_\phi$	$-\sin \phi$	$\cos \phi$	0

直角坐标系与柱坐标系之间
坐标单位矢量的关系柱坐标系与球坐标系之间
坐标单位矢量的关系

1.3 标量场的梯度

标量场和矢量场

确定空间区域上的每一点都有确定物理量与之对应，称在该区域上定义了一个场。

□ 如果物理量是标量，称该场为标量场。

例如：温度场、电位场、高度场等。

□ 如果物理量是矢量，称该场为矢量场。

例如：流速场、重力场、电场、磁场等。

□ 如果场与时间无关，称为静态场，反之为时变场。

从数学上看，场是定义在空间区域上的函数：

静态标量场和矢量场可分别表示为： $u(x, y, z)$ 、 $\vec{F}(x, y, z)$

时变标量场和矢量场可分别表示为： $u(x, y, z, t)$ 、 $\vec{F}(x, y, z, t)$

1. 标量场的等值面

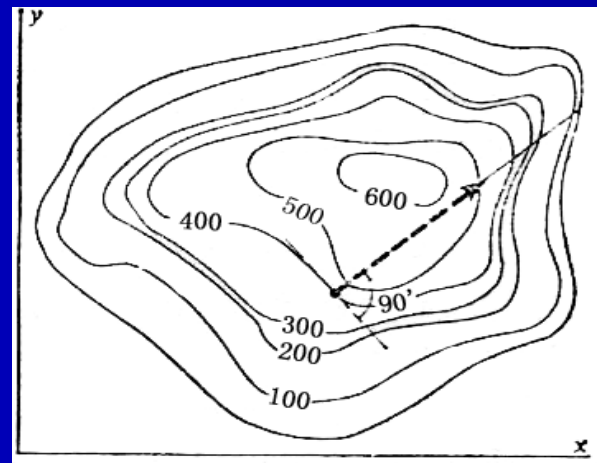
等值面：标量场取得同一数值的点在空间形成的曲面。

意义：形象直观地描述了物理量在空间的分布状态。

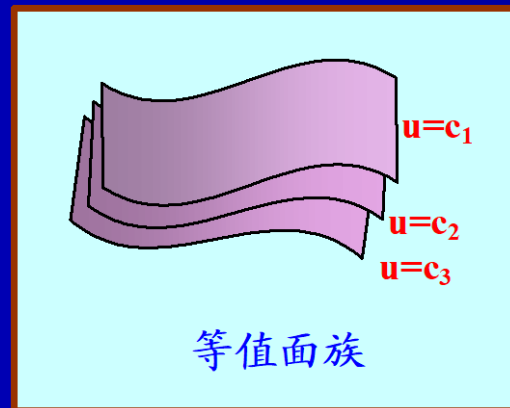
等值面方程： $u(x, y, z) = C$

等值面的特点：

- 常数 C 取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族；
- 标量场的等值面充满场所在的整个空间；
- 标量场的等值面互不相交。



标量场的等值线(面)



2. 方向导数

概念：
$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

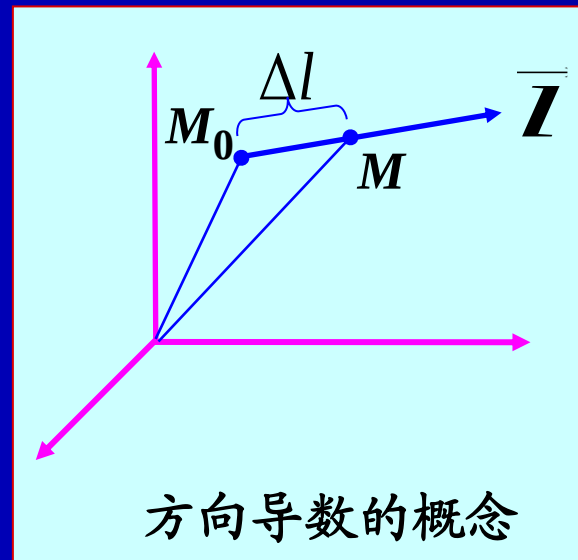
式中： $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$ 、 $\cos \gamma$ —— $\Delta \vec{l}$ 的方向余弦。

意义：方向导数表示场沿某方向的空间变化率。

- $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ —— $u(M)$ 沿 $\vec{l}$ 方向增加；
- $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ —— $u(M)$ 沿 $\vec{l}$ 方向减小；
- $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ —— $u(M)$ 沿 $\vec{l}$ 方向无变化。

特点：方向导数既与点 M_0 有关，也与 $\vec{l}$ 方向有关。

问题：在什么方向上变化率最大、其最大的变化率为多少？



3. 标量场的梯度 ($\text{grad} u$ 或 ∇u)

概念: $\nabla u = \vec{e}_l \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{\max}$, 其中 $\vec{e}_l$ —— $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取得最大值的方向

意义: 描述标量场在某点的最大变化率及其变化最大的方向

梯度的表达式:

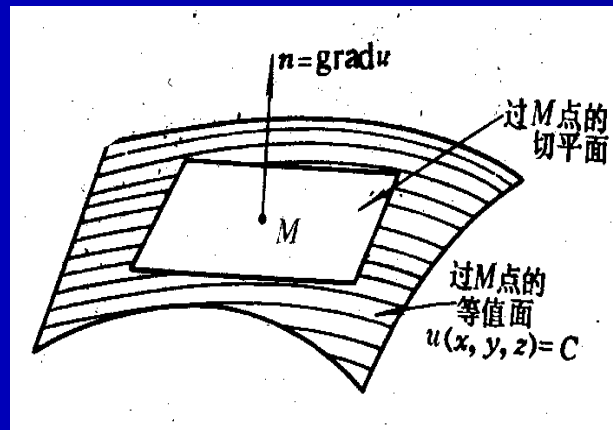
直角坐标系
$$\nabla u = \vec{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

圆柱坐标系
$$\nabla u = \vec{e}_\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \vec{e}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \vec{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

球坐标系
$$\nabla u = \vec{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}$$

梯度的性质：

- 标量场的梯度是矢量场，它在空间某点的方向表示该点场变化最大（增大）的方向，其数值表示变化最大方向上场的空间变化率。
- 标量场在某个方向上的方向导数，是梯度在该方向上的投影。
- 标量场的梯度垂直于通过该点的等值面（或切平面）



梯度运算的基本公式：

$$\begin{cases} \nabla C = 0 \\ \nabla(Cu) = C\nabla u \\ \nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \\ \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \\ \nabla f(u) = f'(u)\nabla u \end{cases}$$

例1.2.1 设一标量函数 $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$ 描述了空间标量场。试求：

(1) 该函数 φ 在点 $P(1,1,1)$ 处的梯度，以及表示该梯度方向的单位矢量。

(2) 求该函数 φ 沿单位矢量 $\vec{e}_l = \vec{e}_x \cos 60^\circ + \vec{e}_y \cos 45^\circ + \vec{e}_z \cos 60^\circ$ 方向的方向导数，并以点 $P(1,1,1)$ 处的方向导数值与该点的梯度值作以比较，得出相应结论。

解 (1) 由梯度计算公式，可求得 P 点的梯度为

$$\begin{aligned}\nabla \varphi|_P &= \left[(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}) (x^2 + y^2 - z) \right]_P \\ &= (\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z) \Big|_{(1,1,1)} = \vec{e}_x 2 + \vec{e}_y 2 - \vec{e}_z\end{aligned}$$

表征其方向的单位矢量

$$\vec{e}_l|_P = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|}|_P = \frac{\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2}} \Big|_{(1,1,1)} = \vec{e}_x \frac{2}{3} + \vec{e}_y \frac{2}{3} - \vec{e}_z \frac{1}{3}$$

(2) 由方向导数与梯度之间的关系式可知, 沿 e_l 方向的方向导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial l} &= \nabla \varphi \cdot \vec{e}_l = (\vec{e}_x 2x + \vec{e}_y 2y - \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x \frac{1}{2} + \vec{e}_y \frac{\sqrt{2}}{2} + \vec{e}_z \frac{1}{2}) \\ &= x + \sqrt{2}y - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

对于给定的 P 点, 上述方向导数在该点取值为

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial l} \right|_P = x + \sqrt{2}y - \frac{1}{2} \Big|_{(1,1,1)} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

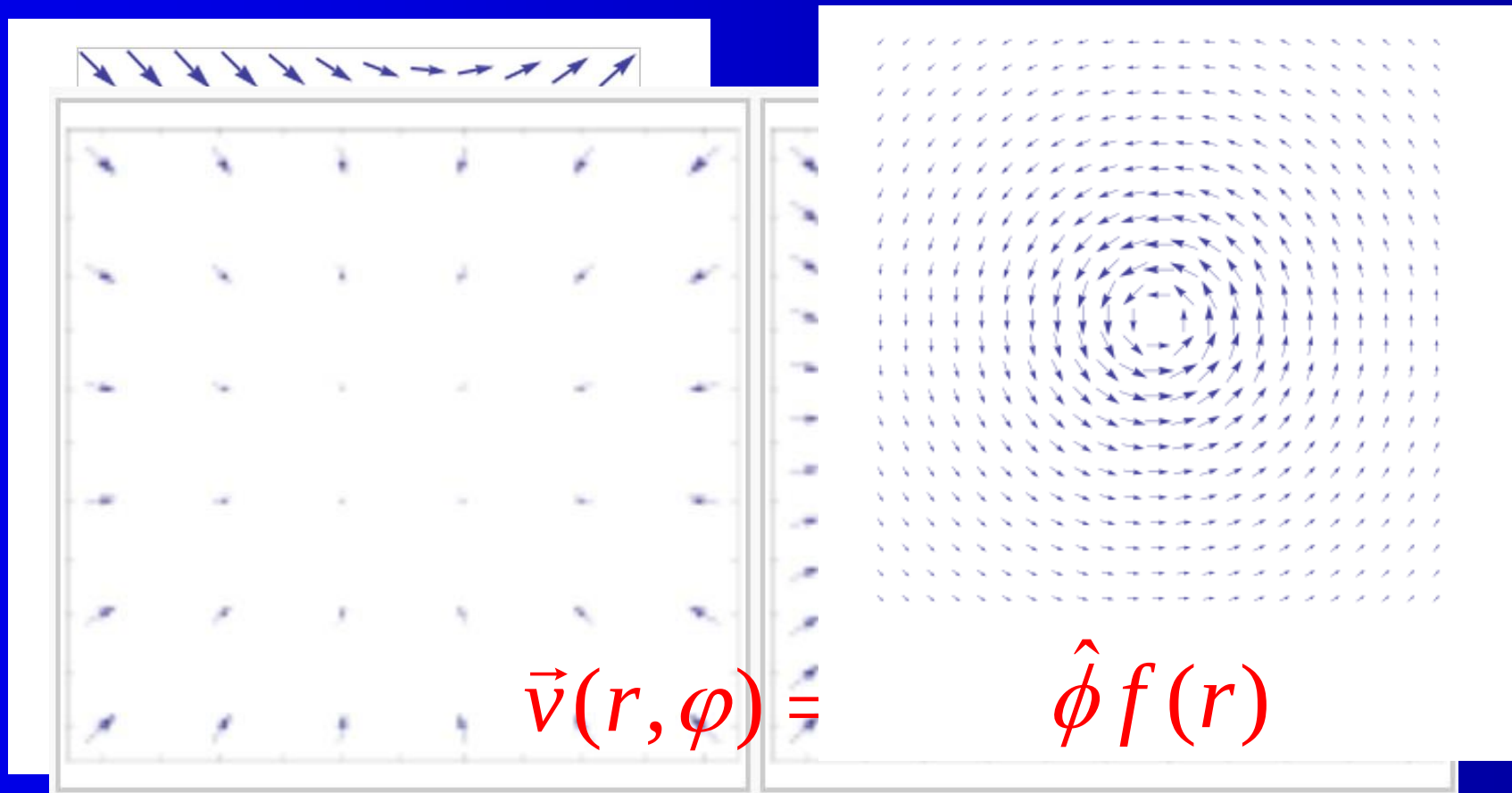
而该点的梯度值为

$$|\nabla \varphi|_P = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \Big|_{(1,1,1)} = 3$$

显然，梯度 $|\nabla \varphi|_P$ 描述了 P 点处标量函数 φ 的最大变化率，即最大的方向导数，故 $\frac{\partial \varphi}{\partial l} \Big|_P < |\nabla \varphi|_P$ 恒成立。

1.4 矢量场的通量与散度

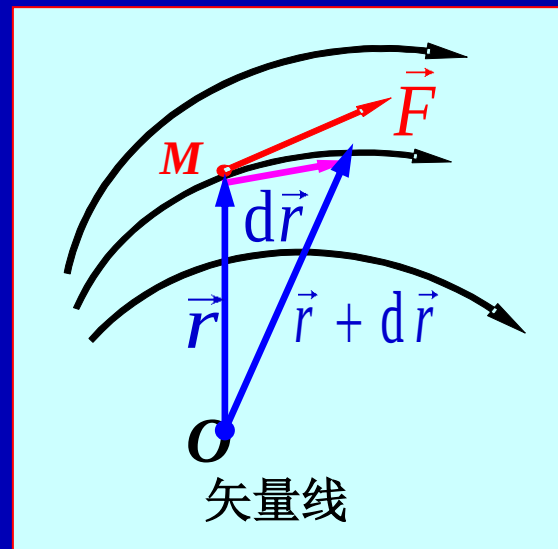
0. 矢量场示例



1. 矢量线

概念： 矢量线是这样的曲线，其上每一点的切线方向代表了该点矢量场的方向。

意义： 形象直观地描述了矢量场的空间分布状态。



矢量线方程：

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}$$

2. 矢量场的通量

问题：如何定量描述矢量场的大小？

引入通量的概念。

通量的概念

$$\psi = \int d\psi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$$

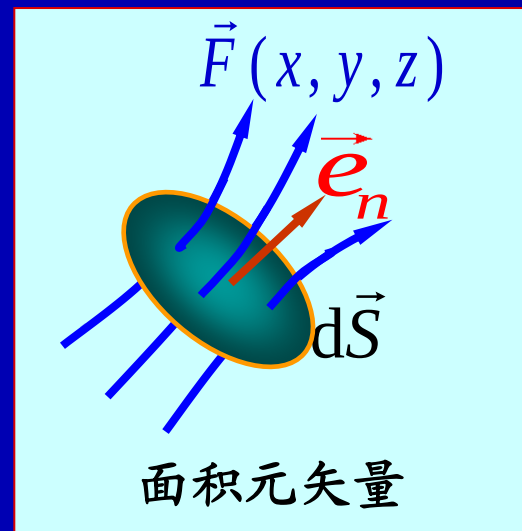
其中： $d\vec{S} = \vec{e}_n dS$ ——面积元矢量；

$\vec{e}_n$ ——面积元的法向单位矢量；

$d\psi = \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$ ——穿过面积元 $d\vec{S}$ 的通量。

如果曲面 S 是闭合的，则规定曲面的法向矢量由闭合曲面内指向外，矢量场对闭合曲面的通量是

$$\psi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS$$

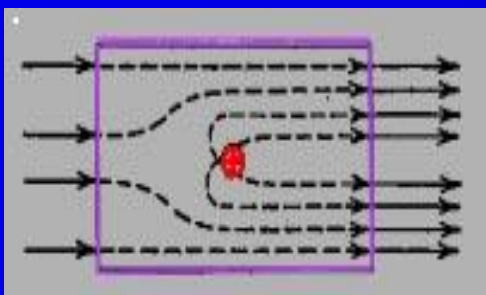


通量的物理意义



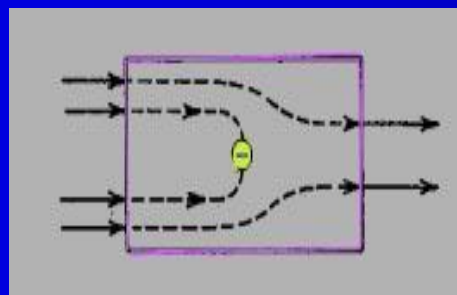
通量的物理意义

矢量场通过闭合曲面通量的三种可能结果



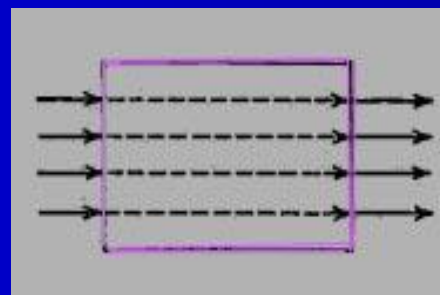
$$\psi > 0$$

通过闭合曲面有
净的矢量线穿出



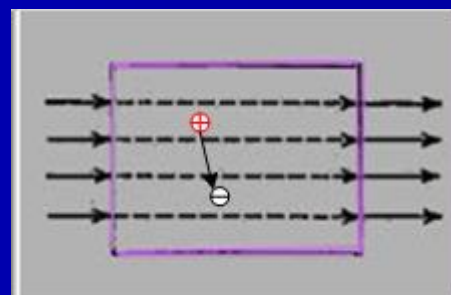
$$\psi < 0$$

有净的矢
量线进入



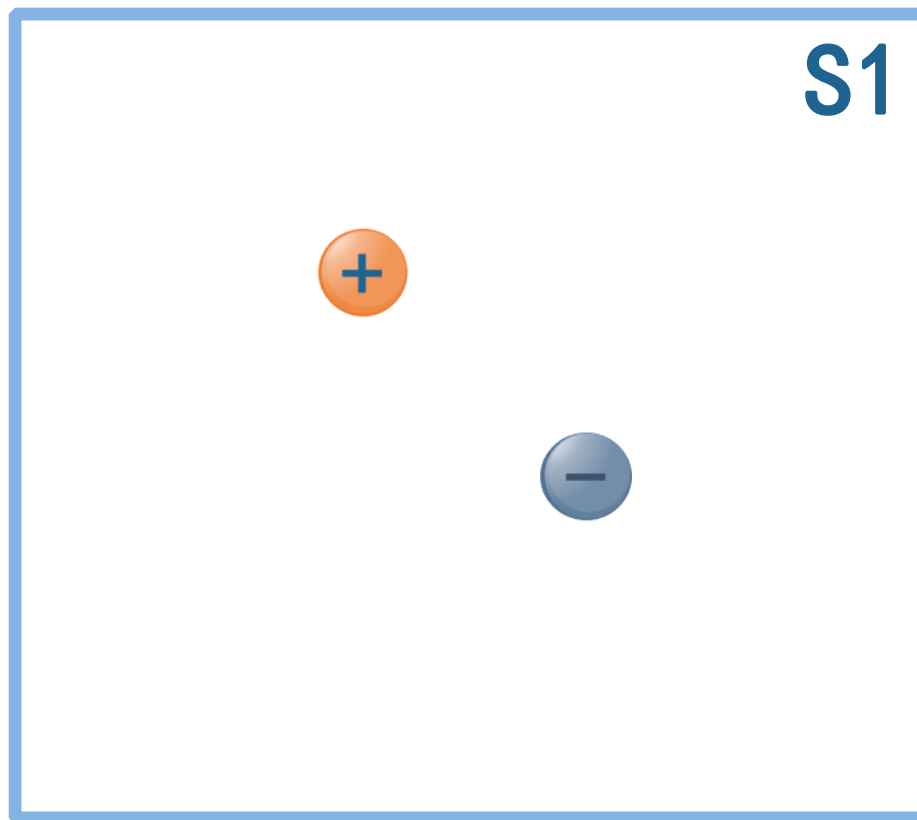
$$\psi = 0$$

进入与穿出闭合曲
面的矢量线相等

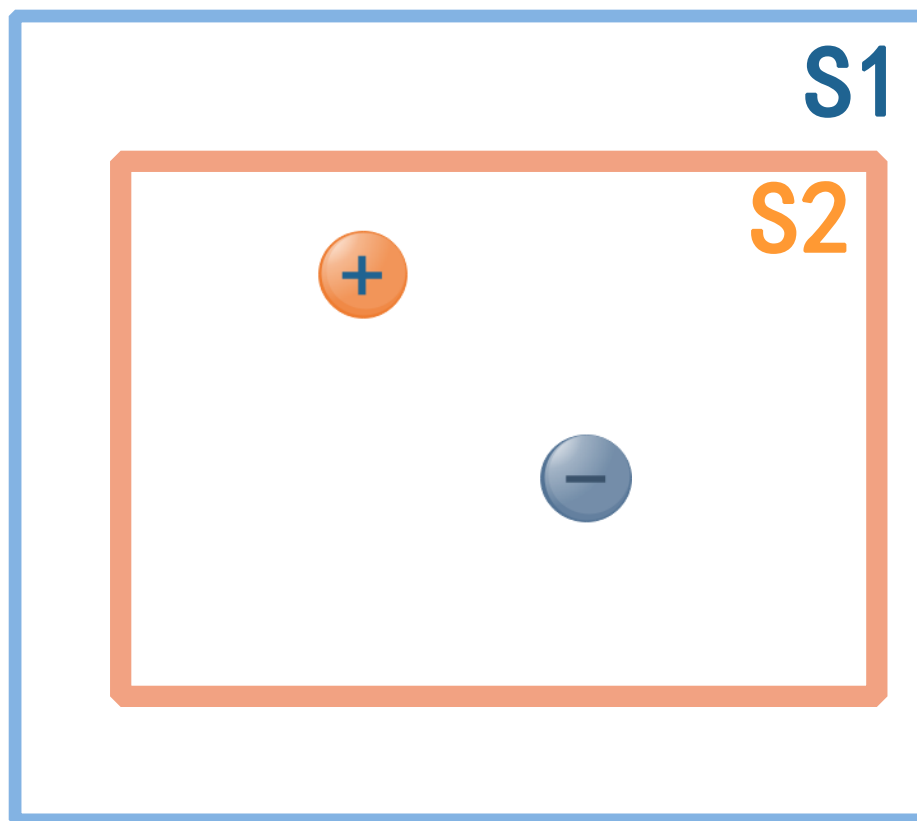


闭合曲面的通量从宏观上建立了矢量场通过闭合曲面的通量与曲面内产生矢量场的源的关系。

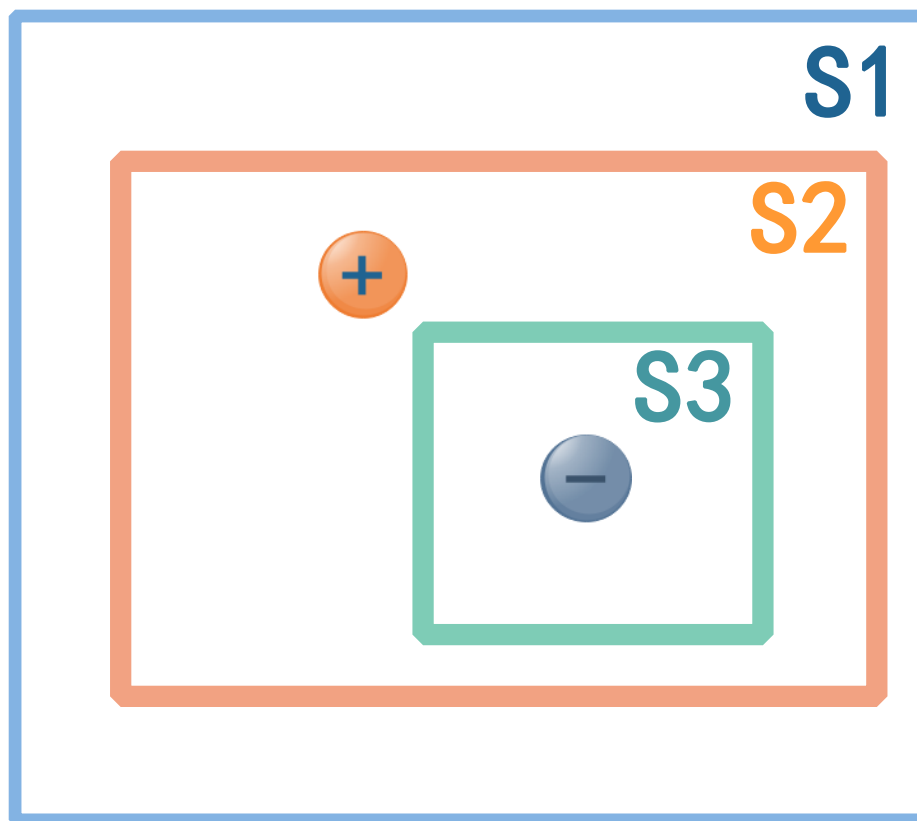
如何寻找通量源？



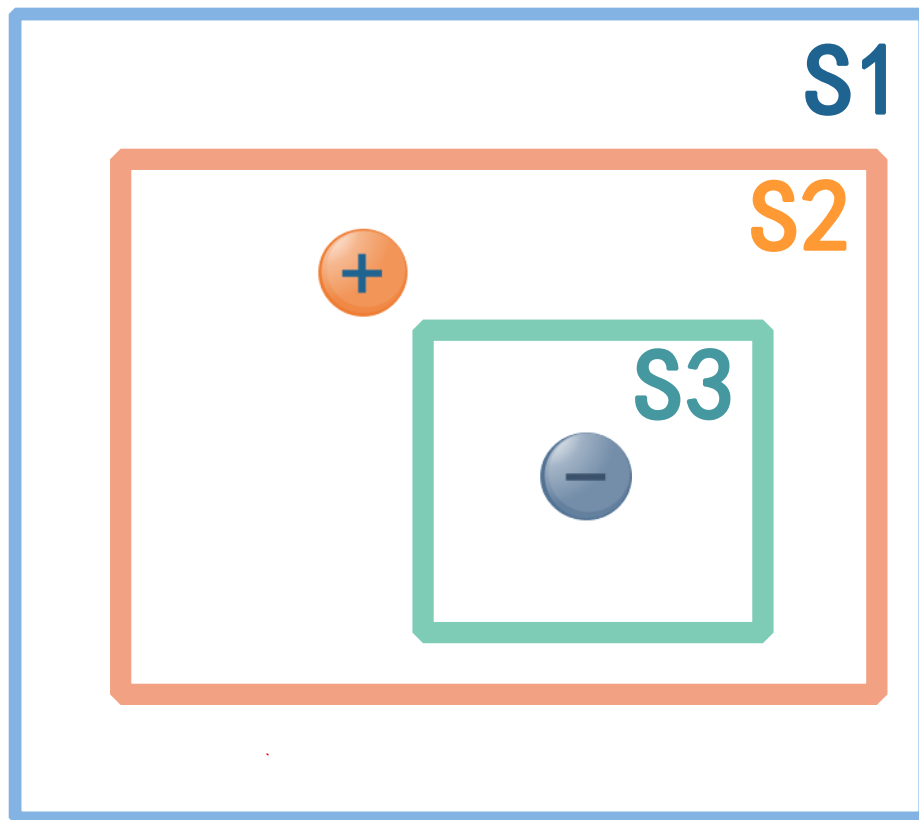
如何寻找通量源？



如何寻找通量源？



如何寻找通量源？



$$\psi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{e}_n dS \longrightarrow 0$$

3. 矢量场的散度

定义：流出单位体积元封闭面的通量

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

直角坐标系下散度表达式的推导

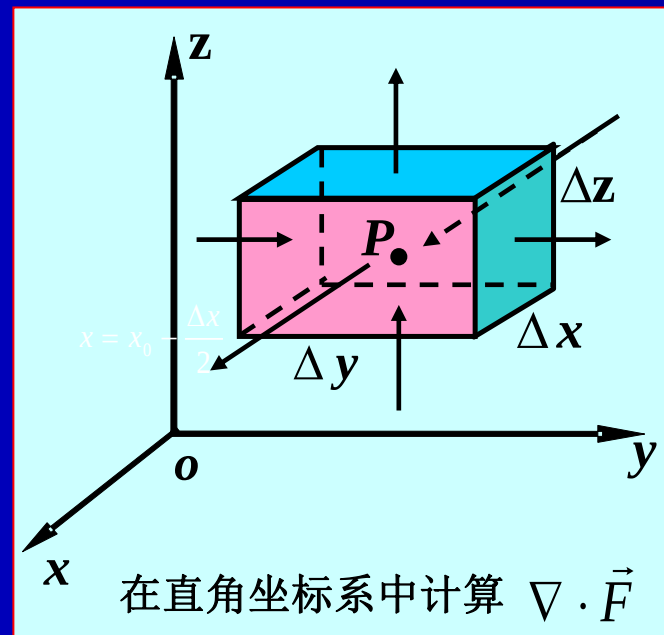
不失一般性，令包围 P 点的体积元 ΔV 为一直平行六面体，如图所示。则

$$F_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) \approx F_x\left(x_0, y_0, z_0\right) + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0, z_0}$$

$$F_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) \approx F_x\left(x_0, y_0, z_0\right) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial F_x}{\partial x} \bigg|_{x_0, y_0, z_0}$$

即流出 $x = x_0 - \frac{\Delta x}{2}$ 和 $x = x_0 + \frac{\Delta x}{2}$ 两面元的通量为：

$$\left[F_x\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) - F_x\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\right] \Delta y \Delta z = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$



同理，可计算出应流出另两组侧面的通量，最后得：

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

于是根据定义求得散度为：

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

散度的表达式:

直角坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

圆柱坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial F_\phi}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

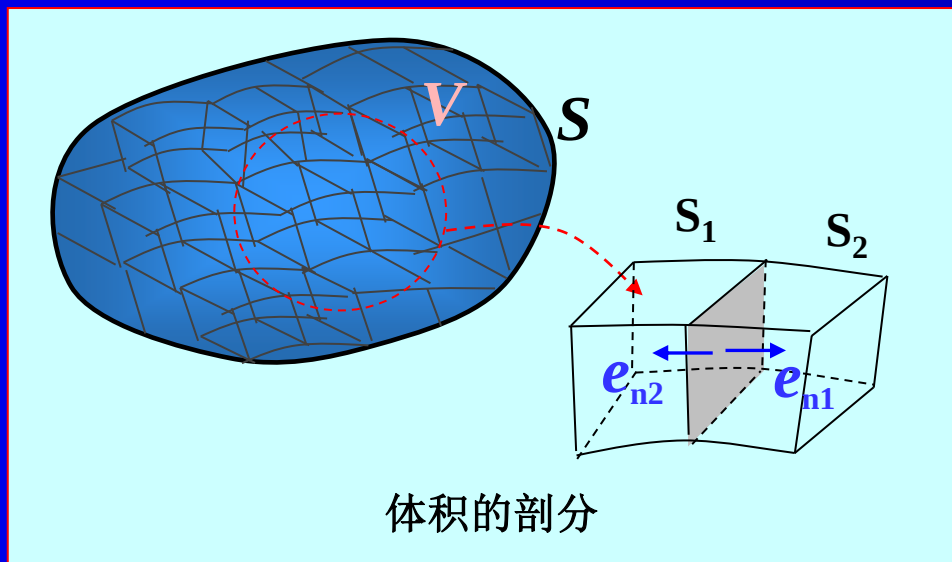
球坐标系 $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi)$

散度的有关公式:
$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{C} = \nabla \cdot \vec{C} = 0 \text{ (}\vec{C}\text{为常矢量)} \\ \nabla \cdot (\vec{C}f) = \vec{C} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (k\vec{F}) = k\nabla \cdot \vec{F} \text{ (}k\text{为常量)} \\ \nabla \cdot (f\vec{F}) = f\nabla \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f \\ \nabla \cdot (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \cdot \vec{F} \pm \nabla \cdot \vec{G} \end{array} \right.$$

4. 散度定理

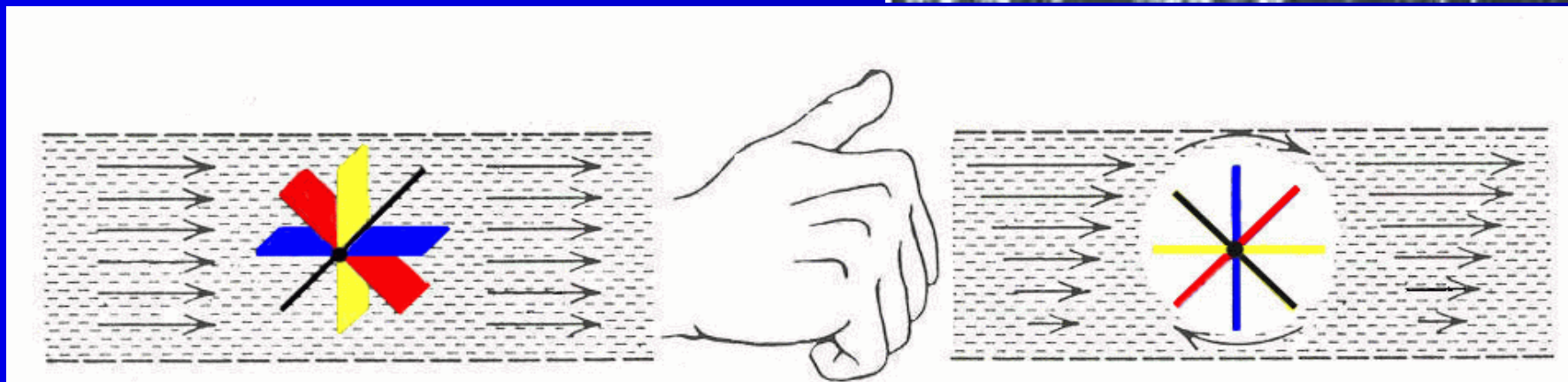
通量与散度的关系:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$



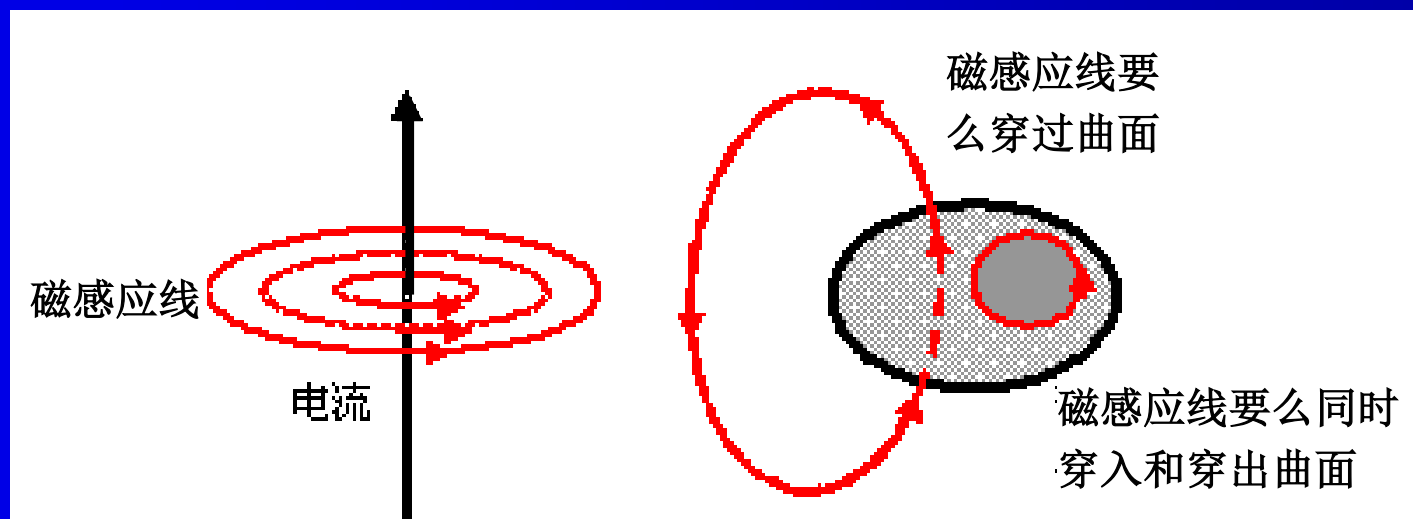
1.5 矢量场的环流和旋度

1. 矢量场的环流与旋涡源



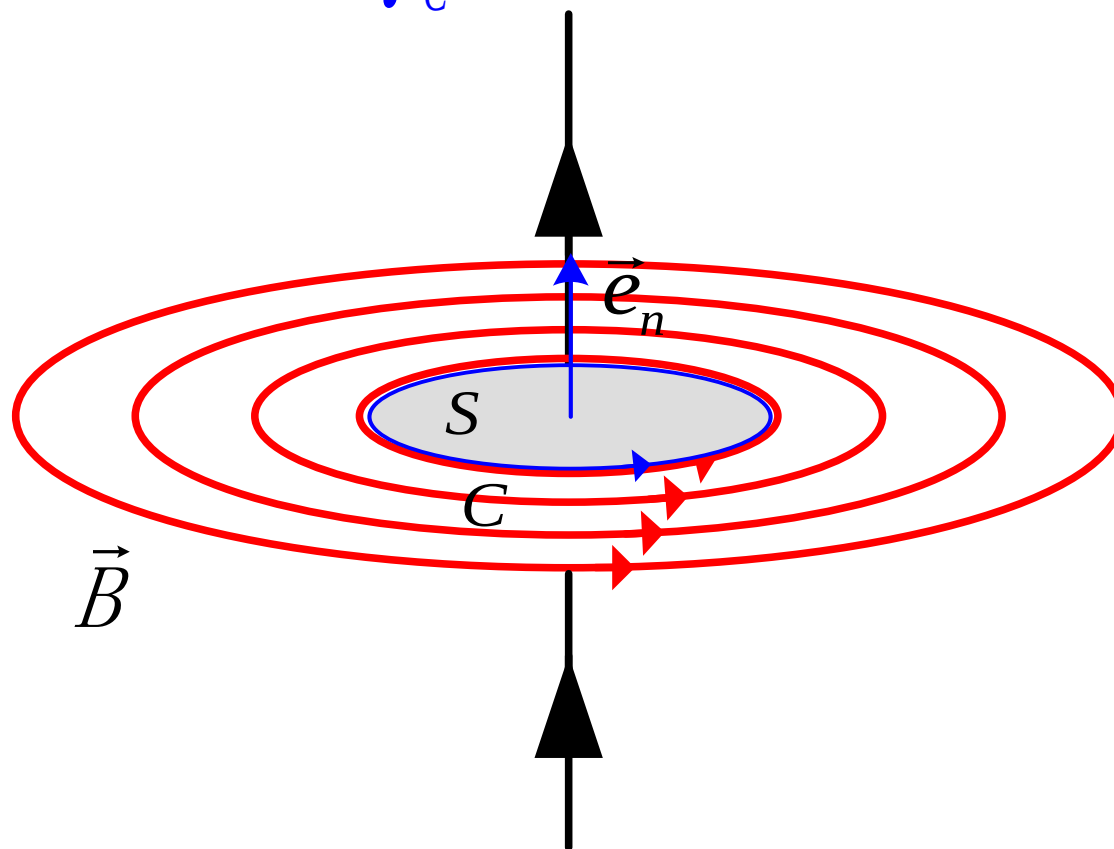
磁场的环流与电流的关系：

$$\oint_C \vec{B}(x, y, z) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J}(x, y, z) \cdot d\vec{S}$$

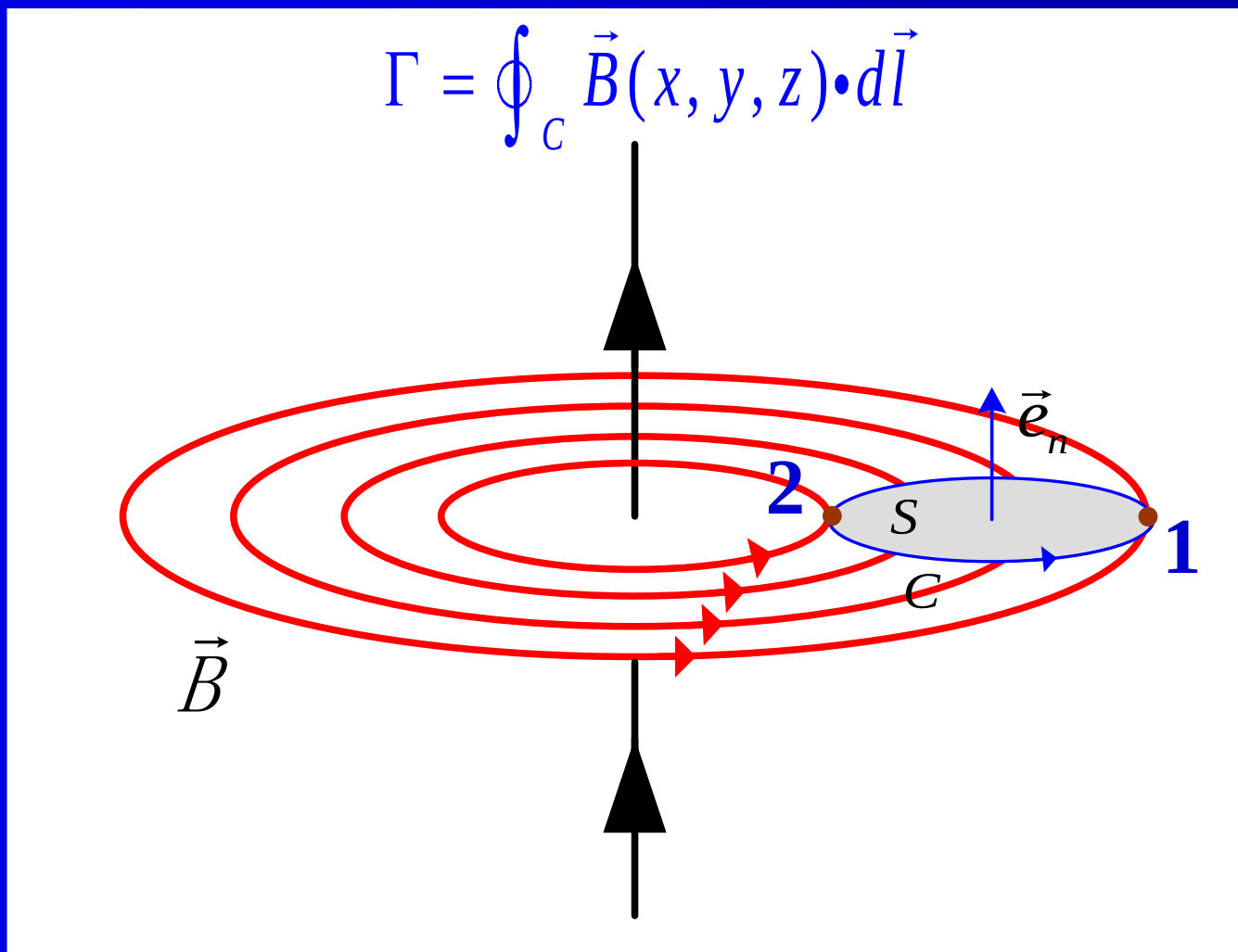


I: 电流穿过以封闭曲线C为边界的面，且与磁力线平行

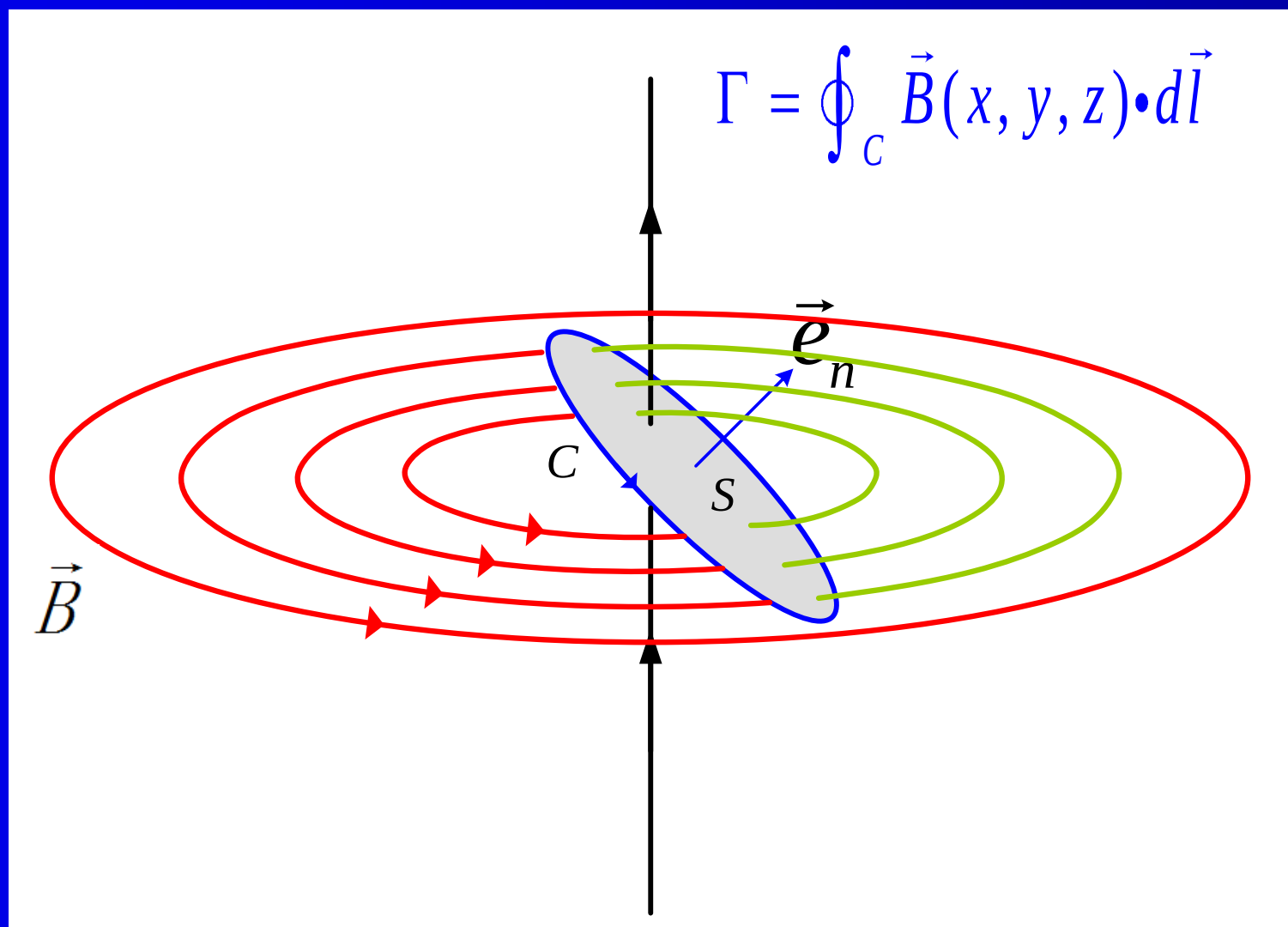
$$\Gamma = \oint_C \vec{B}(x, y, z) \cdot d\vec{l}$$



II: 电流未穿过以封闭曲线C为边界的面



III: 一般情况



环流的定义:

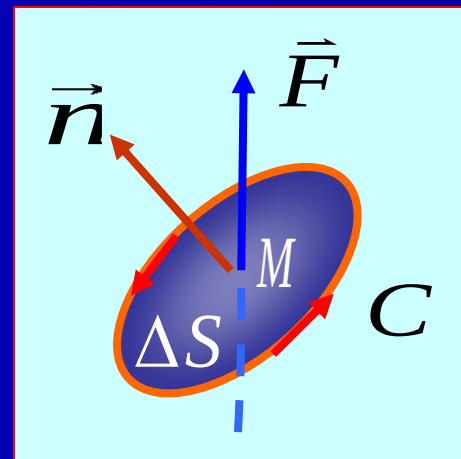
$$\Gamma = \oint_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{l}$$

2. 矢量场的旋度 ($\nabla \times \vec{F}$)

(1) 环流面密度

单位面元边界闭合曲线的环流:

$$\text{rot}_n \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



称为矢量场在点 M 处沿方向 $\vec{n}$ 的环流面密度。

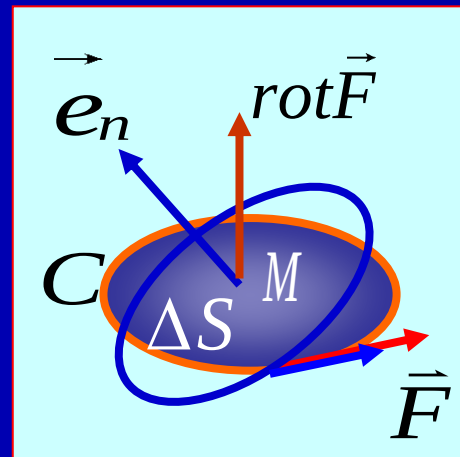
特点: 其值与点 M 处的方向 $\vec{n}$ 有关。

任一取向面元的环流面密度，是该点最大环流面密度的投影：

$$\begin{aligned}\text{rot}_n \vec{F} &= \vec{e}_n \cdot \text{rot} \vec{F} \\ &= (\vec{e}_x \cos \alpha + \vec{e}_y \cos \beta + \vec{e}_z \cos \gamma) \cdot (\vec{e}_x \text{rot}_x \vec{F} + \vec{e}_y \text{rot}_y \vec{F} + \vec{e}_z \text{rot}_z \vec{F})\end{aligned}$$

(2) 矢量场的旋度

$$\text{rot } \vec{F}$$



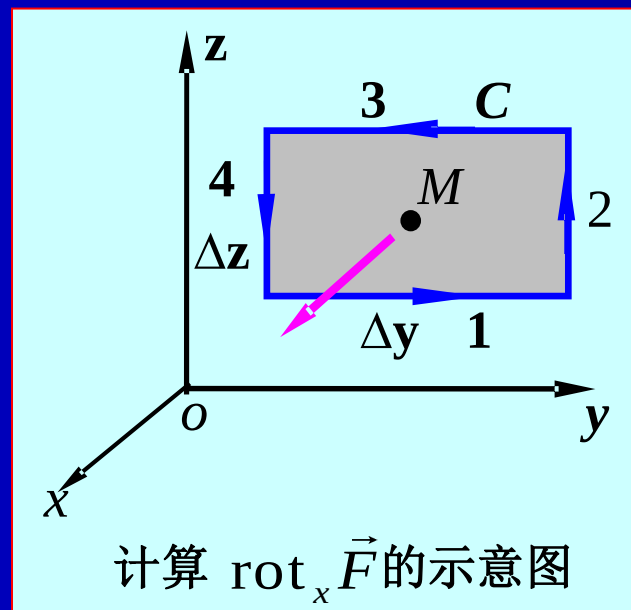
- 直角坐标系中 $\text{rot}_x \vec{F}$ 、 $\text{rot}_y \vec{F}$ 、 $\text{rot}_z \vec{F}$ 的表达式

推导 $\text{rot}_x \vec{F}$ 的示意图如图所示。

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} &= \int_{\Delta l_1} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{\Delta l_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{\Delta l_{13}} \vec{F} \cdot d\vec{l} + \int_{\Delta l_4} \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= F_{y1} \Delta y + F_{z2} \Delta z + F_{y3} (-\Delta y) + F_{z4} (-\Delta z)\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}F_{y1} &\approx F_y(M) - \left. \frac{\partial F_y}{\partial z} \right|_M \frac{\Delta z}{2} \\ F_{z2} &\approx F_z(M) + \left. \frac{\partial F_z}{\partial y} \right|_M \frac{\Delta y}{2} \\ F_{y3} &\approx F_y(M) + \left. \frac{\partial F_y}{\partial z} \right|_M \frac{\Delta z}{2} \\ F_{z4} &\approx F_z(M) - \left. \frac{\partial F_z}{\partial y} \right|_M \frac{\Delta y}{2}\end{aligned}$$



于是
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z$$

故得
$$\text{rot}_x \vec{F} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

同理可得
$$\text{rot}_y \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad \text{rot}_z \vec{F} = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

旋度的计算公式:

● 直角坐标系 $\nabla \times \vec{F} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

● 圆柱坐标系

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\phi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

● 球坐标系

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\phi \end{vmatrix}$$

旋度的有关公式：

矢量场的旋度
的散度恒为零

$$\nabla \times \vec{C} = 0$$

$$\nabla \times (f\vec{C}) = \nabla f \times \vec{C}$$

$$\nabla \times (f\vec{F}) = f\nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$$

$$\nabla \times (\vec{F} \pm \vec{G}) = \nabla \times \vec{F} \pm \nabla \times \vec{G}$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \nabla \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \nabla \times \vec{G}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) \equiv 0$$

标量场的梯度
的旋度恒为零

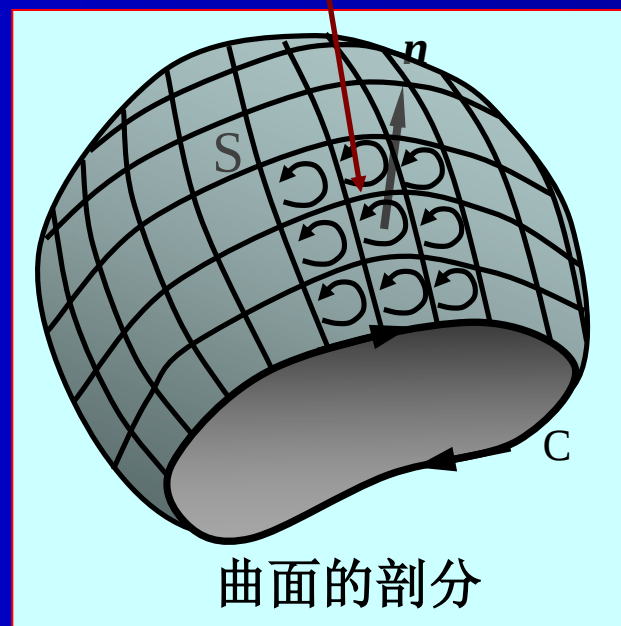
$$\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$$

3. 斯托克斯定理

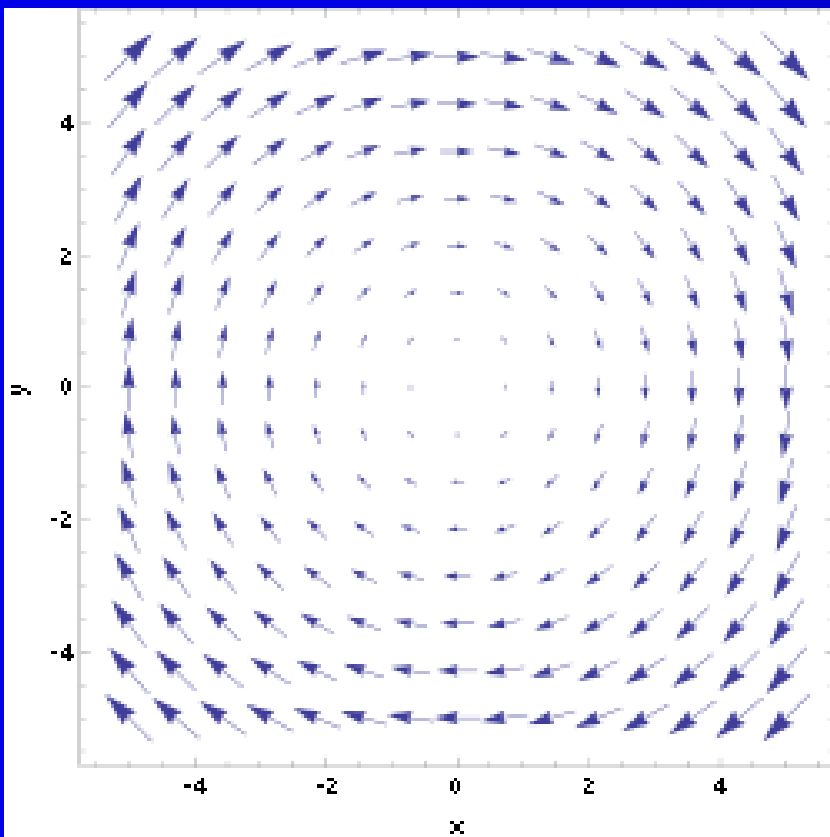
环流与旋度的关系：

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

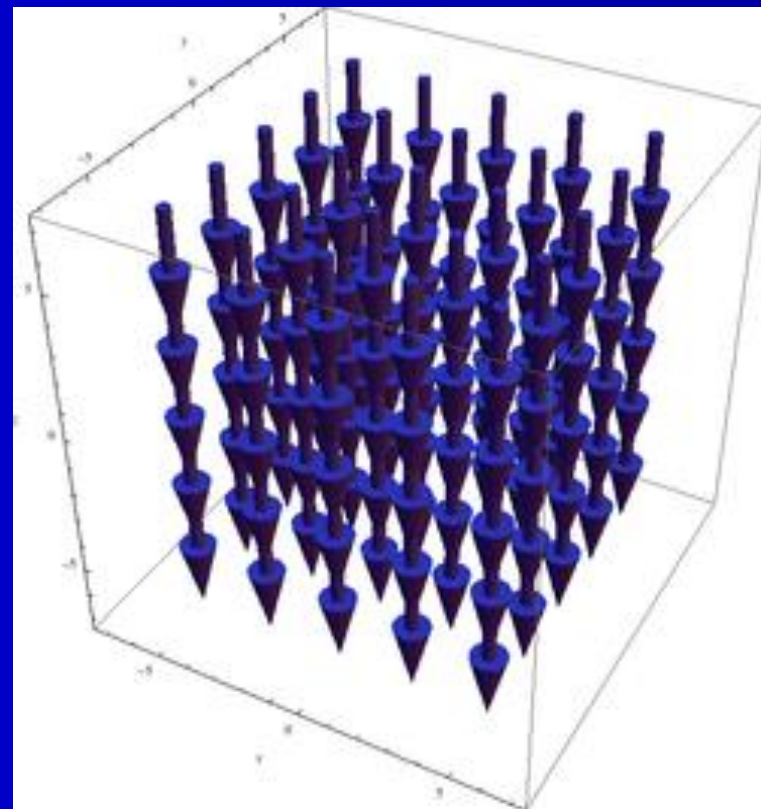
方向相反大小
相等结果抵消



4. 旋度示例 1

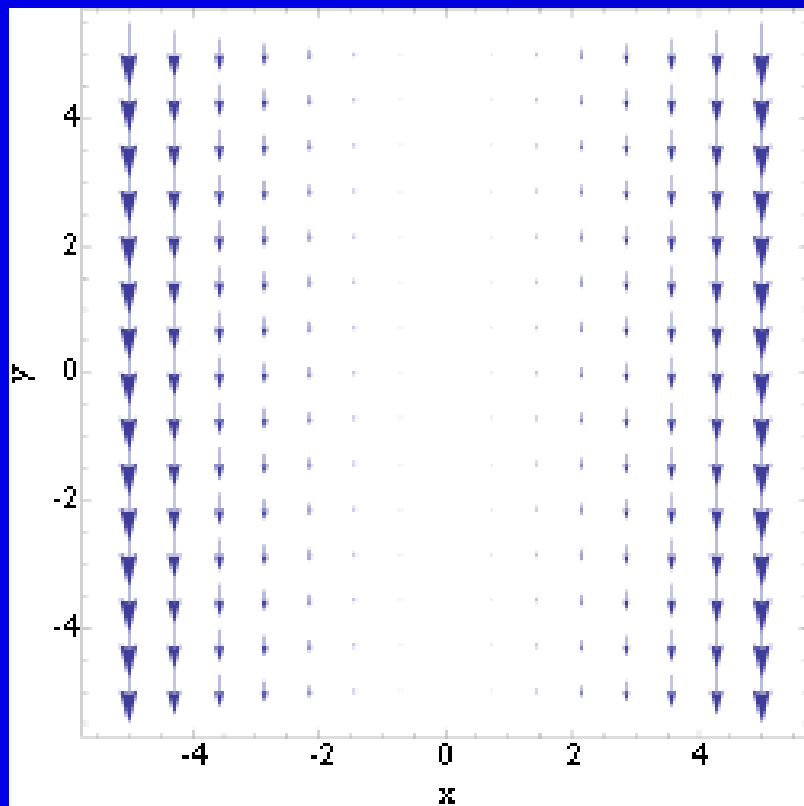


$$\vec{F} = y\bar{e}_x - x\bar{e}_y$$

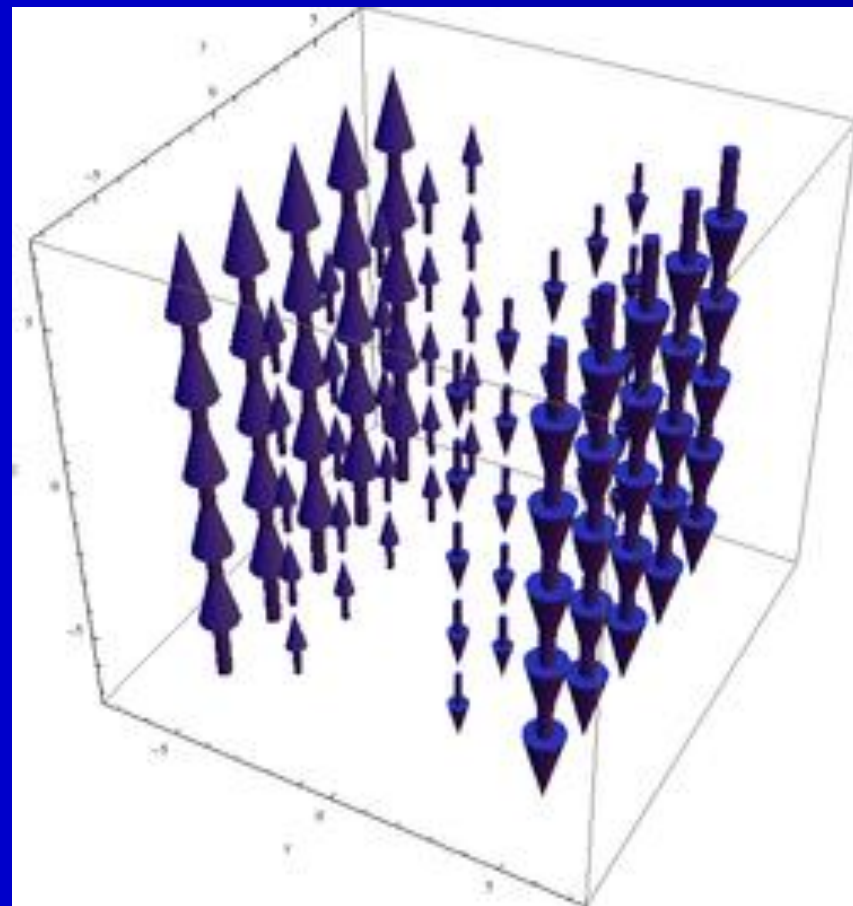


$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= 0\bar{e}_x + 0\bar{e}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y) \right] \bar{e}_z \\ &= -2\bar{e}_z\end{aligned}$$

4. 旋度示例 2

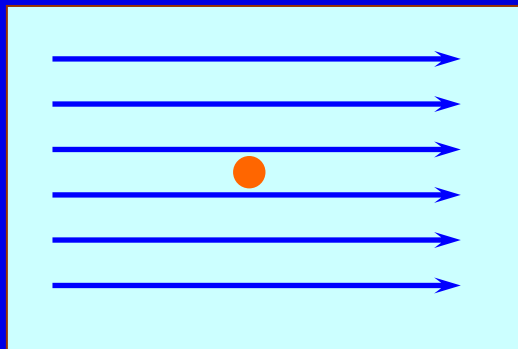


$$\vec{F} = -x^2 \vec{e}_y$$

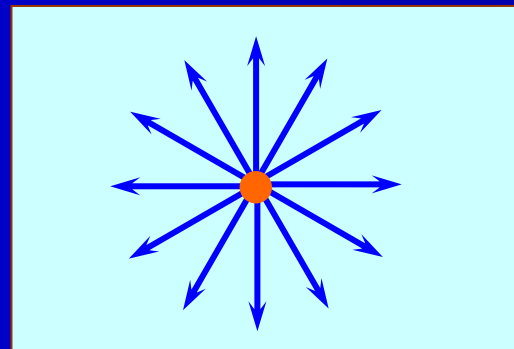


$$\nabla \times \vec{F} = -2x \vec{e}_z$$

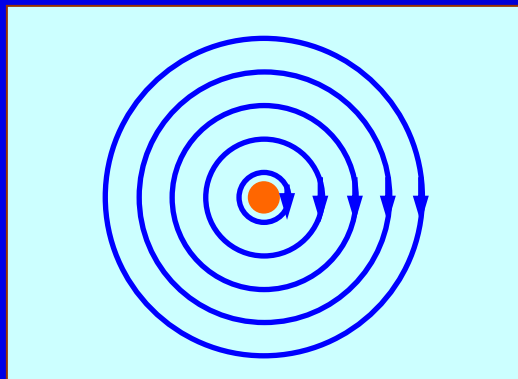
5. 散度和旋度的区别



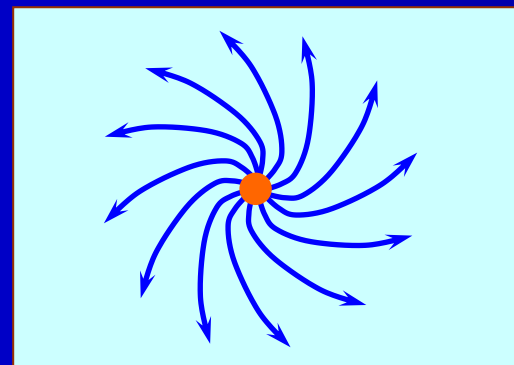
$$\nabla \cdot \vec{F} = 0, \nabla \times \vec{F} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0, \nabla \times \vec{F} = 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} = 0, \nabla \times \vec{F} \neq 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} \neq 0, \nabla \times \vec{F} \neq 0$$

1.6 矢量场的分类与分析方法

1. 矢量场的源

散度源

旋度源

2. 矢量场按源的分类

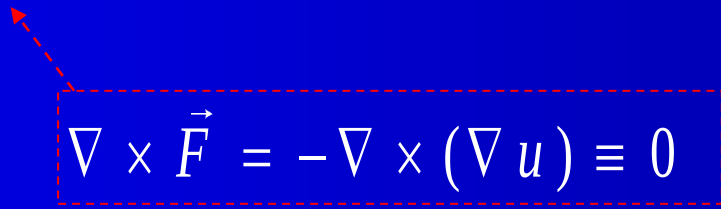
(1) 无旋场

仅有散度源而无旋度源的矢量场, $\nabla \times \vec{F} \equiv 0$

性质: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, 线积分与路径无关, 是保守场。

无旋场可以用标量场的梯度表示为

$$\vec{F} = -\nabla u$$


$$\nabla \times \vec{F} = -\nabla \times (\nabla u) \equiv 0$$

例如: 静电场

$$\nabla \times \vec{E} \equiv 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \varphi$$

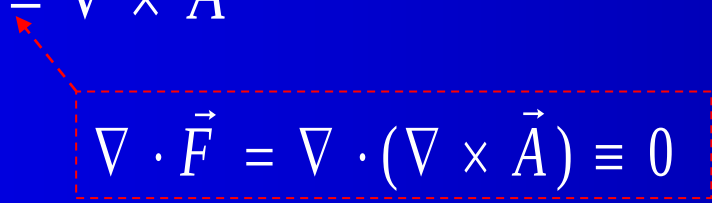
(2) 无散场

仅有旋度源而无散度源的矢量场，即 $\nabla \cdot \vec{F} \equiv 0$

性质： $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$

无散场可以表示为另一个矢量场的旋度

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$$


$$\nabla \cdot \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) \equiv 0$$

例如，恒定磁场

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

(3) 无旋、无散场 (源在所讨论的区域之外)

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \longrightarrow \vec{F} = -\nabla u$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot (-\nabla u) = 0$$

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad \text{叫拉普拉斯算符}$$

计算公式:

直角坐标系 $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

圆柱坐标系 $\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

球坐标系 $\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$

(4) 有散、有旋场

这样的场可分解为两部分：无旋场部分和无散场部分

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_l(\vec{r}) + \vec{F}_c(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

无旋场部分

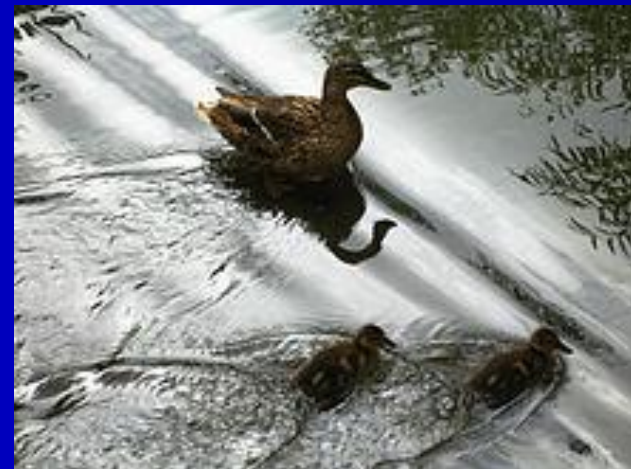
无散场部分

其中， $u(\vec{r})$ 和 $\vec{A}(\vec{r})$ 可通过亥姆霍兹定理求得

**** 叠加原理 ****

对任何**线性系统**在给定地点与时间，由两个或多个激励产生的合成反应是由每个激励单独产生的反应之和。

例1：水波



例2：自由电荷产生的静电场

例3：矢量场

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_l(\vec{r}) + \vec{F}_c(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

无旋场部分

无散场部分

1.8 亥姆霍兹定理

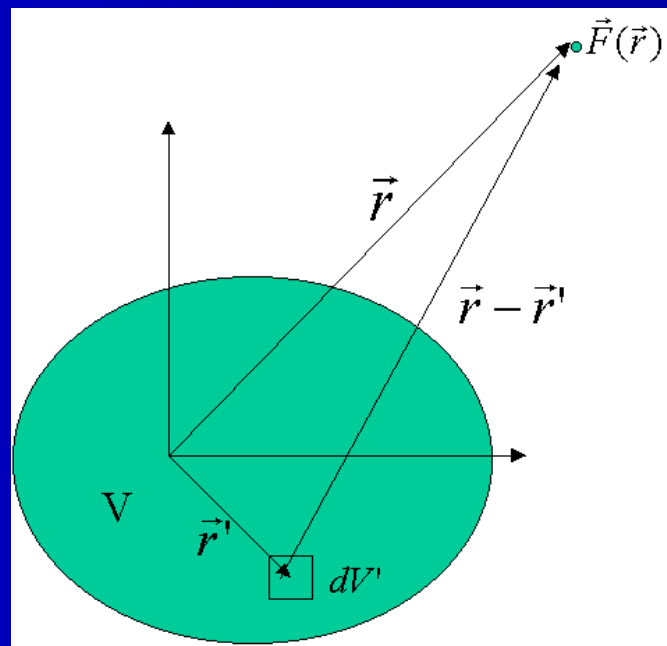
一、在无界空间中的解

条件： 矢量场的源分布在有限区域

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla u(\vec{r}) + \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$$

$$\text{式中: } u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

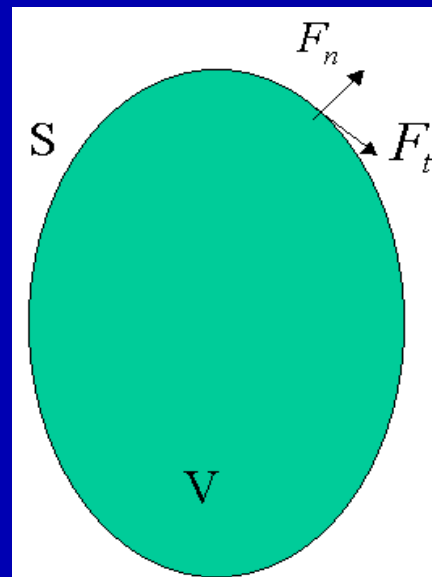
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$



二、在有界空间区域中的解

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}') \cdot d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{F}(\vec{r}') \times d\vec{S}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



有界区域

结论：区域中的场不仅取决于分布在区域中的体分布的散度源和旋度源，还取决于分布于区域边界上的场值（面分布的散度源和旋度源）