

非线性方程求根方法

李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn

<http://xiaozhouli.com>

问题

- 构造收敛速度快的迭代格式
 - 平方收敛的迭代格式

Newton迭代法

Newton迭代法

- Newton迭代格式
- Newton迭代法的收敛性
- Newton迭代法的收敛速度
- 弦截法

如何构造平方收敛的迭代格式？

- 思路一：一般迭代 $\varphi(x) = x - \alpha(x)f(x)$
- 思路二：校正法

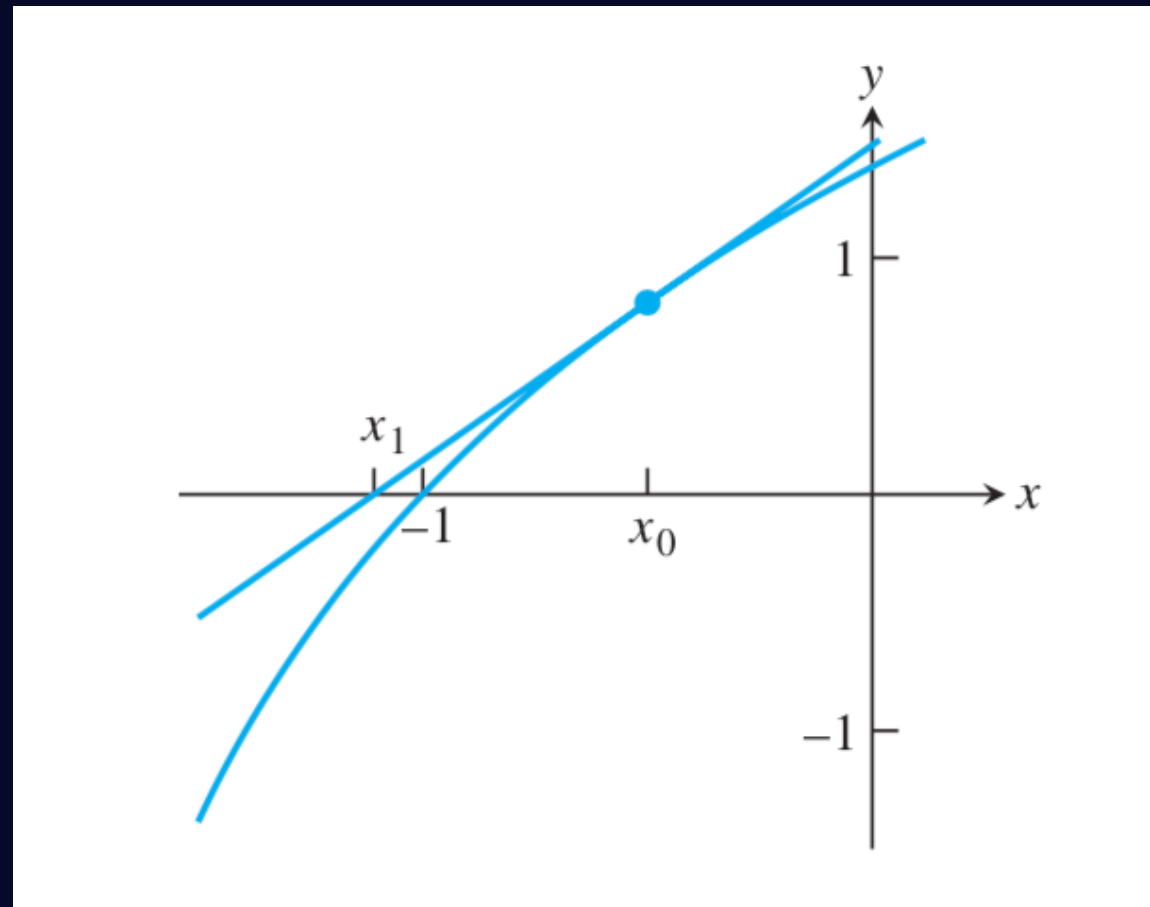
Newton迭代法

选择合适的初值 x_0

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

- 取 $\varphi(x) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ 的不动点迭代法。

Newton迭代法的几何意义



- 思路三：线性化的思想 — 用切线代替曲线

应用 求正数 C 的平方根，即求二次方程
 $x^2 - C = 0$ 的根

例 计算 $\sqrt{2}$

Newton迭代法的局部收敛性

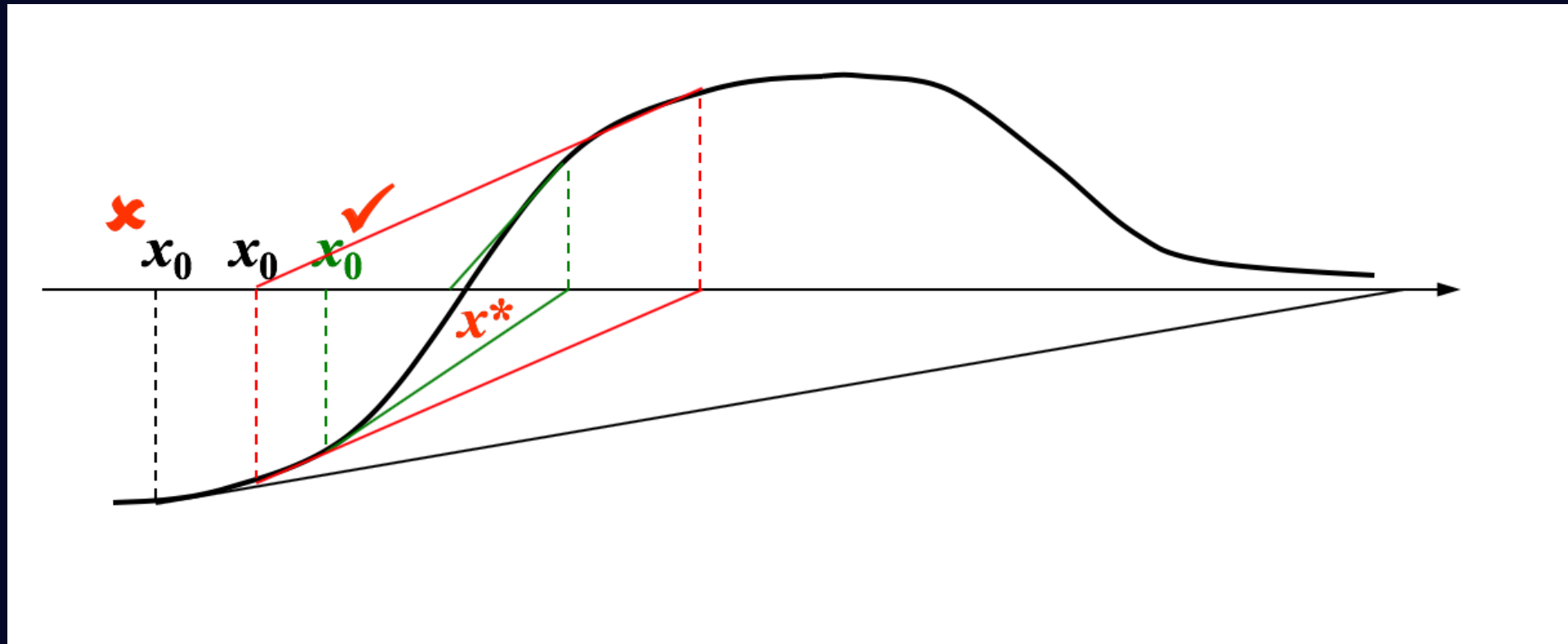
定理2.7: 设 $f(x)$ 在点 x^* 的某邻域内具有二阶连续导数, 且 $f'(x^*) \neq 0$, 则对充分靠近点 x^* 的初值 x_0 , Newton迭代法至少平方收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^* - x_{n+1}|}{|x^* - x_n|^2} = \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|$$

证:

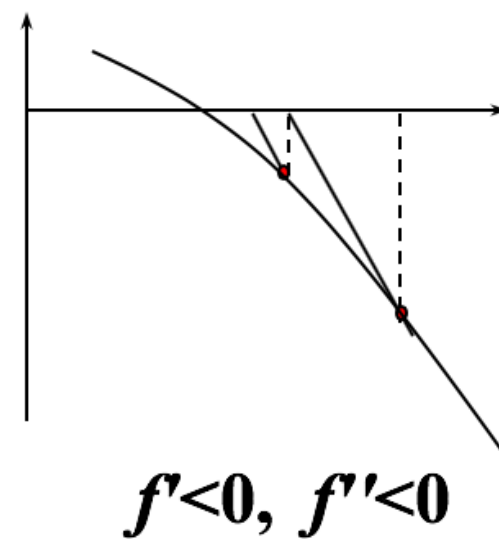
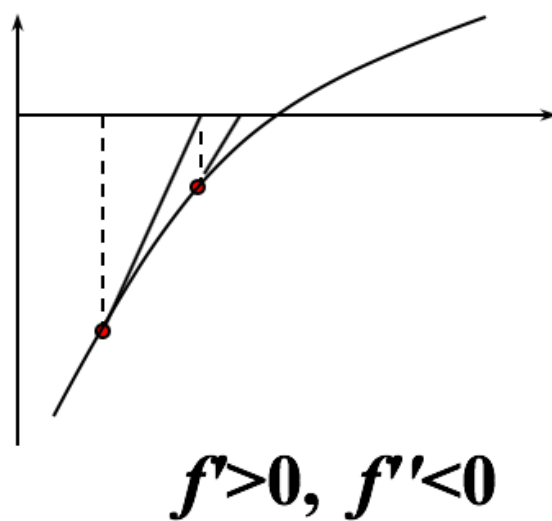
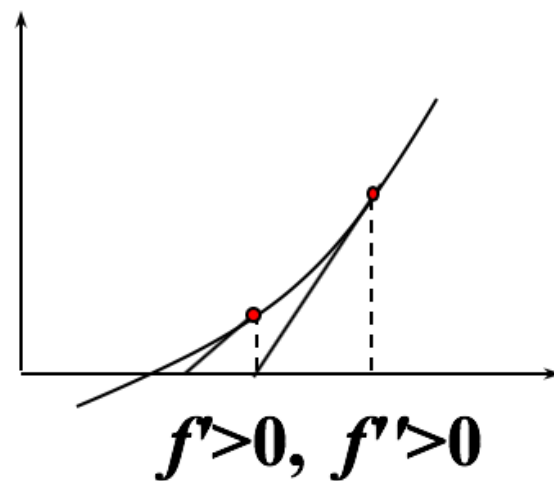
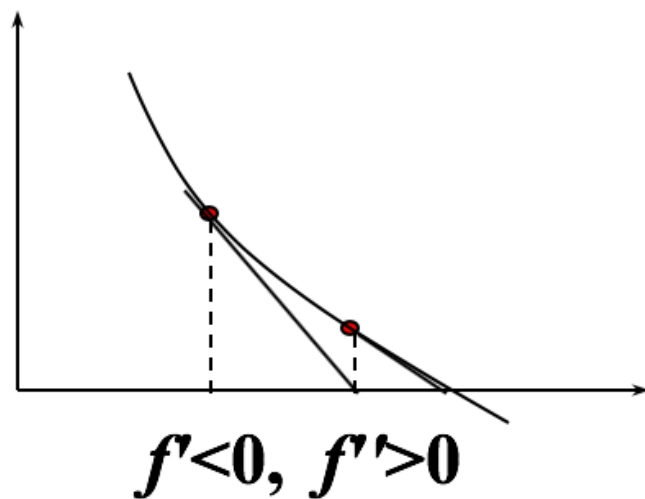
例 求解方程 $x^3 + 10x - 20 = 0$ 在 $x = 1.5$ 附近的根。

初值对Newton迭代法的影响



- Newton方法收敛性依赖于 x_0 的选取

Newton迭代法收敛的四种情况



f', f'' 连续且不变号

Newton迭代法的缺陷

情况一: $f'(x^*) = 0$

例 用Newton迭代法求解方程 $x^3 - 3x + 2 = 0$

情况一: $f'(x^*) = 0 \implies x^*$ 为 $f(x) = 0$ 的重根

引理 设 x^* 是 $f(x) = 0$ 的 m 重根, 则Newton迭代法只有一阶收敛。

修正的Newton迭代法

设 x^* 是 $f(x) = 0$ 的 m 重根, 则修正的Newton迭代法

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

为二阶收敛。

Newton迭代法的缺陷

情况二： $f'(x) = ?$

- Newton迭代法利用了除了函数 $f(x)$ 本身信息之外还使用了其导数 $f'(x)$ 的信息
 - 所以其收敛速度较二分法，一般不动点迭代法快（no free lunch）
- 如何求导数 $f'(x)$ 或者其近似？

Newton迭代法的替代 — 弦截法

用导数的逼近

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

替代Newton迭代法中的 $f'(x_n)$, 即

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

弦截法

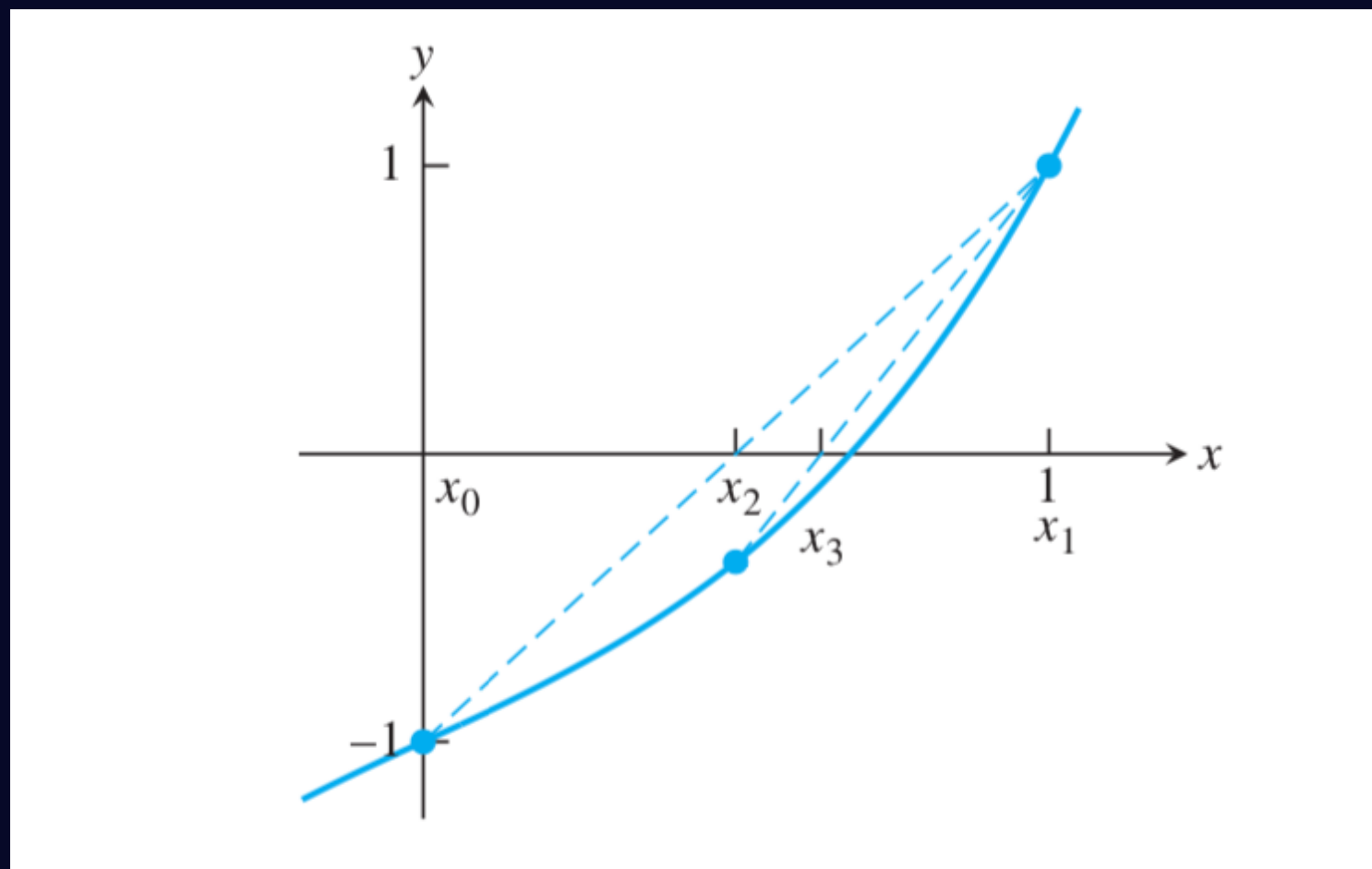
选择合适的初值 x_0, x_1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1}), \quad n = 1, \dots,$$

- 两个初始值

弦截法的几何意义

- 用弦线代替切线



弦截法的收敛阶

设弦截法收敛到点 x^* , 且 $f'(x^*) \neq 0$, 则其迭代序列满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x - x_{n+1}|}{|x - x_n|^p} = \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right|^{p-1}$$

- $p = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.62 > 1$, 超线性收敛。

非线性方程组

非线性方程组

问题：求解 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

- 可以用之前的什么方法求解？

可以用之前的什么方法求解？

- 二分法迭代
- 不动点迭代法 ✓
- Newton迭代法 ✓

Newton迭代法

线性化的方法:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)})$$

- $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) = ?$

Newton迭代法

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \text{ 其中}$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

应用 求抛物线 $y = x^2 - 1$ 与圆
 $(x - 2)^2 + (y - 0.5)^2 = 1$ 的交点

问题

对Newton迭代法:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

- 如何求解 $\mathbf{x}^{(k+1)}$?
- 如何求 $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}$?

谢谢！