线性方程组的直接法

李小舟

xiaozhouli@uestc.edu.cn
http://xiaozhouli.com

线性方程组的直接法

- 高斯消元法是一个复杂度为$\mathcal{O}(n^3)$的浮点运算有限序列，并最终给出一个解。因此高斯消元法叫做求解线性方程组的直接方法。
- 理论上直接法在有限步之内给出了线性方程组的精确解。
- 实际中呢？计算机的精度是有限的

例 求解方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{pmatrix}$$

线性方程组直接法的误差

- 直接法的误差
  - 计算机的有限精度造成的误差
  - 方程右端项b误差$b + \delta b$
  - 系数矩阵A误差$A + \delta A$
- 如何进行误差分析？
  - 如何度量误差？绝对值？

向量和矩阵的范数

向量的范数

定义3.1 设$\mathbb{R}^n$是n维向量空间, 如果对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 都有一个实数与之对应, 且满足如下三个条件:

(1) 正定性: $\|x\| \geq 0$且$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) 齐次性: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) 三角不等式:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, x, y \in \mathbb{R}^n$$

则称$\|x\|$为向量x的范数

XIAOZHOU

向量的范数

- 范数概念是绝对值概念的一种自然推广
- $\mathbb{R}^n$空间上的一种度量
- $\mathbb{R}^n$空间+$\|\cdot\|$=度量空间：可定义邻域、开集、收敛、连续等概念，例如

$$\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x^*\|=0$$

向量的范数

常用的范数：

- $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$

- $\|x\|_2 = \left(x^T x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

- $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i|$

例 证明$\|x\|_2$是$\mathbb{R}^n$上的一种范数。

提示Cauchy不等式：$|x^Ty| \le \|x\|_2\|y\|_2$

矩阵的范数

定义3.2 设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，若存在实数$\|A\|$满足

(1) 正定性：$\|A\| \geq 0$且$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(2) 齐次性：$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(3) 三角不等式： $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(4) 相容性：$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ （为什么？）

则称$\|A\|$是矩阵A的范数

矩阵的算子范数

- 想要建立向量范数与矩阵范数的关系：

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$$

设$\|\cdot\|$是$\mathbb{R}^n$上的向量范数，$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，则

$$\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

称为矩阵A的算子范数。

- 证：

矩阵的范数

常用的算子范数：

- $$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$
- $$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$
- $$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

直接法的误差估计

方程右端项误差$b \to b + \delta b$

设$A(x + \delta x) = (b + \delta b)$，则

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

条件数

定义3.4 $\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$称为线性方程组$Ax = b$的条件数。

- 矩阵A的条件数为求解$Ax = b$时，对于所有b，可能出现的最大误差放大因子
- 当条件数很大时，称$Ax = b$为病态问题
- 当条件数较小时，称$Ax = b$为良态问题

例 矩阵H_n，其元素$H_n(i,j)=1/(i+j-1)$

$$H_n=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(n+1) \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \cdots & 1/(n+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

方程系数矩阵误差$A \to A + \delta A$

引理 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$且$\|A\| < 1$，则矩阵$I \pm A$可逆

$$\|(I \pm A)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|A\|}$$

设$(A + \delta A)(x + \delta x) = b$，则

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A\|\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

求解线性方程组的误差分析

设线性方程组$Ax = b$的精确解为x^*，近似解为x，则

$$\frac{\|x^* - x\|}{\|x^*\|} \le \mathrm{Cond}(A) \cdot \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

这里残差向量$r = b - Ax$。

谢谢！